EXERCICE

Probabilité

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 points.

1- Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne, et totalise son gain algébrique x.

a) Déterminer toutes les valeurs possibles de x.

b) Démontrer que la probabilité pour que le joueur perde 1 point est $\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

c) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant à chacun des événements suivants :

A : « le joueur gagne 4 points »

B : « le joueur perd 6 points »

2- Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

Arithmétique

1- Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $\text{PGCD}(x,y)=14$ et $xy=2940$

2- Soient a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a\times10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N=\overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \quad (7)$.

b) En déduire tous les entiers naturels N cherchés.

PROBLEME 1

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que AB = AC = 2 cm et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

Méthode géométrique

1- On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$. On pose $f=r\circ t$ et $g=t\circ r$.

a) Montrer que f est une rotation. En décomposant r et t en produit de deux symétries orthogonales, déterminer le centre E de f.

b) Déterminer l'image de K par g. Caractériser alors cette transformation.

2- On désigne par S la similitude directe transformant D en C et C en B.

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.

3- On appelle Ω le centre de la similitude S.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2=\Omega D^2$.

b) En déduire la nature du triangle ΩDC.

4- On pose $\varphi = S\circ S$.

a) Quelle est la nature de la transformation φ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image du point D par la transformation φ.

Utilisation des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1- Donner les affixes des points A, B, C, I et D.

2- a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S.

b) En déduire l'affixe du centre Ω de S.

3- Soit la transformation $\overline{S}=t\circ S_{(C\Omega)}$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et $S_{(C\Omega)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(C\Omega)$.

a) Vérifier que les droites (AI) et $(C\Omega)$ sont parallèles.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\overline{S}$.

c) Déterminer l'écriture complexe associée à $\overline{S}$.

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$. On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A

1- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2-x)e^x-1$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la fonction g s'annule uniquement en deux valeurs que l'on notera α et β. On prendra $\alpha<\beta$.

Vérifier que $-2<\alpha<0$ et $1<\beta<2$.

c) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

d) Montrer que $e^{\alpha}=\frac{1}{2-\alpha}$.

2- a) En étudiant le sens de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$, montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$. En déduire que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 1$.

3- a) Calculer la dérivée f' de f puis, à l'aide des résultats de la question 1-, construire le tableau de variation de f.

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

b) Tracer Δ et $(\mathscr{C})$.

On prendra :

$\alpha \simeq -1,14$; $f(\alpha) \simeq -0,46$; $\beta \simeq 1,84$; $f(\beta) \simeq 1,18$

Partie B

1- Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

2- Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0;1]$,

$$f(x) - x = \frac{(1-x)h(x)}{e^x - x}.$$

b) Etudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0;1]$.

3- a) Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.

b) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

****

Etienne Bézout

Naissance : 31 mars 1730
Décès : 27 septembre 1783
Nationalité : Française
Champs : Mathématiques
Institution : Académie des Sciences (France)
Célèbre pour : Arithmétique – Algèbre