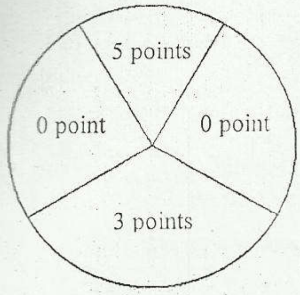
grandprof.net

EXERCICE

Probabilité

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1- Le joueur lance une fléchette. On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point, p_3 la probabilité d'obtenir 3 points et p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

Sachant que $p_5 = \frac{1}{2} p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} p_0$, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2- Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On considère les événements suivants :

A : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

B : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

C : « le joueur perd la partie ».

a) Calculer la probabilité de l'événement A.

b) On admettra dans la suite que $P(\mathrm{B}) = \frac{7}{36}$.

En déduire la probabilité de l'événement C.

3- Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2-

Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

Arithmétique

1- Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

En déduire que $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2- Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3- Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$

a) Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A_p est divisible par 8.

b) En déduire que le nombre a écrit dans le système « base 3 » : par $a = \overline{11110}_{trois}$ est divisible par 8.

On raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix du nombre a.

PROBLEME 1

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = AC = l$, où l est un réel fixe strictement positif et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à B, I le milieu $[BC]$, O le milieu de $[CD]$ et (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$.

Partie I

1- Placer sur une figure les points A, B, C, D, I, O et (Γ).

2- a) Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\overrightarrow{U}$ indépendant du point M ? Déterminer alors le vecteur $\overrightarrow{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

b) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2l^2$ est une droite (Δ) que l'on déterminera. Montrer que les droites (Δ) et (BC) sont parallèles.

3- Soit G le barycentre du système $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$? Justifier votre réponse.

b) Déterminer et construire l'ensemble (Σ) des points M du plan tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2l^2$.

Partie II

On désigne par s la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, les éléments caractéristiques de s, notamment son centre Ω.

1- Méthode géométrique

a) Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude s ; en déduire l'existence de Ω.

b) Montrer que $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ (1)

et que $\Omega C = 2\Omega D$ (2).

c) A l'aide de (1), prouver que Ω appartient au cercle (Γ), puis, en utilisant (2), prouver que $\Omega D = l$. Etablir enfin que $B\Omega = BC$.

d) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de $[\Omega C]$.

Préciser la nature du quadrilatère $CAD\Omega$. Placer le point Ω.

2- Utilisation des complexes

On pose $\vec{u} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormal $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe.

a) Déterminer les affixes des points B, C et D.

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

c) Déterminer l'affixe z_Ω de Ω.

grandprof.net

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$ pour $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A

I- Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$.

1- a) Étudier le sens de variation de g.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

2- Montrer que, pour tout x de $[2\,;3]$, on a $g(x) < \dfrac{1}{2}$.

II- 1- Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ et démontrer que f est continue en 0.

2- La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3- a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$).

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4- Etudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x) = g(x)$) puis dresser son tableau de variation.

5- Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ, la courbe (C) et la droite D d'équation $y = x$.

Partie B

1- Soit la fonction h définie sur l'intervalle $I = [2\,;3]$ par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que, pour tout x de I, $h'(x) < 0$. On remarquera que $h'(x) = g(x) - 1$.

2- En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.

3-a) Montrer que, pour tout x de I, $0 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

4- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à I.

b) Etablir les inégalités suivantes :

(1) pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$,

(2) pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

d) Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.

****