EXERCICE

Probabilité

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.

1- Quel est le nombre de cas possibles ?

2- Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « les élèves choisissent des parfums deux à deux distincts ».

B : « les élèves choisissent le même parfum ».

C : « deux exactement des élèves choisissent le même parfum ».

Arithmétique

On se propose de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\begin{cases} N \equiv 5 \ (13) \\ N \equiv 1 \ (17) \end{cases}$

1- a) Vérifier que 239 est solution du système.

b) Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant $17x - 13y = 4$.

2- a) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

b) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

3- Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5 \ (13) \\ N \equiv 1 \ (17) \end{cases}$

PROBLEME 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1cm.

Partie I

1- Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

2- a) Montrer qu'il existe une similitude indirecte f et une seule qui transforme A en O et O en B. Donner l'expression complexe de f.

b) Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.

Partie II

1- Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.

On pose $g = f \circ h$.

a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) On désigne par M″ l'image du point M d'affixe z par la transformation g. Montrer que l'expression complexe de g est $z'' = -i\,\bar{z} + 2 + 2i$ où z″ est l'affixe de M″.

c) Montrer qu'il existe sur l'axe $(O; \vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L.

Reconnaître alors la transformation g.

d) En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.

2- Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ soient parallèles à Δ.

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 3 cm.

Partie A

1- a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

c) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).

2- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3- Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$.

4- On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 0$.

a) Résoudre l'équation (E) sur $[0; +\infty[$.

b) Déterminer la fonction h, solution de l'équation (E) qui vérifie $h(0) = 2$ et $h'(0) = 0$.

c) Vérifier que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \ln h(x)$.

Partie B

Pour tout $x \in [0; +\infty[$ on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\,dt$.

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1- Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1- de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$.

2- Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$

3- Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout $t \in [1; 1+a]$ on a $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme, établir que

$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4- Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3- :

$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t$

puis $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

5- On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté ℓ.

Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

6- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$0 \leq u_n \leq \ln\left(1+e^{-2n}\right)$. (On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t) = \ln\left(1+e^{-2t}\right)$).

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

7- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

****