EXERCICE

Probabilité

Une boîte contient 8 cubes :

- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1- On note A l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'événement : « Obtenir au plus un petit cube ».

a) Calculer la probabilité de A.

b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2- L'enfant répète 5 fois l'épreuve « tirer simultanément 3 cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.

a) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

Arithmétique

Les quatre questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1- a) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans le système de base a. Que vaut a ?

b) B s'écrit 6236 dans la base 7. Ecrire B en base 8.

2- Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$. Montrer que si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7.

3- Montrer qu'il existe un seul couple (a,b) d'entiers naturels, tel que $a<b$ et $\text{PPCM}(a,b)-\text{PGCD}(a,b)=1$.

PROBLEME 1

Dans le plan orienté, ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=+\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment $[CD]$.

Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$.

Partie A

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2- On désigne par Ω le centre de cette similitude.

Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3- a) Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC).

En déduire le point image par s du point C.

b) Soit K le point image par s du point I. Démontrer que K est le milieu du segment $[ID]$.

4- On pose $h=s\circ s$ (composée de s avec elle-même).

a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2+2i$ et $2i$.

1- Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z'=\frac{1}{2}iz+1+i$.

2- Calculer l'affixe du point Ω.

3- Calculer l'affixe du point E tel que $s(E)=A$. Placer le point E sur la figure.

PROBLEME 2

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \quad \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct d'unité $1cm$.

Partie A

On considère la fonction I définie pour $x\in\mathbb{R}$ par :

$\text{I}(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$.

1- En intégrant par parties, démontrer que :

$\text{I}(x)=e^x-(1+x)$.

2- a) Soit $x>0$.

Démontrer que pour tout $t\in[0;x]$, on a : $1\leq e^t\leq e^x$.

En déduire que pour tout $x>0$, on a : $\frac{x^2}{2}\leq \text{I}(x)\leq \frac{x^2e^x}{2}$.

b) Soit $x<0$.

Démontrer que pour tout $t\in[x;0]$, on a : $e^x\leq e^t\leq 1$.

En déduire que pour tout $x<0$, on a : $\frac{x^2e^x}{2}\leq \text{I}(x)\leq \frac{x^2}{2}$.

3- En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Partie B

1- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

2- a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par $g(x)=e^{x}(x-1)+1$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3- a) Calculer la dérivée f' de f puis dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer (T) et (C).

4- Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.

b) Quelle est la limite de F en 0 ?

5- a) En utilisant une intégration par parties, calculer

$\int_{0}^{1}xe^{x}\,dx$.

b) Montrer que $\frac{5}{4}\leq F(1)\leq\frac{3}{2}$. (On pourra utiliser la question 2- a) de la partie A).

Que peut-on en conclure ?

Partie C

On considère l'équation différentielle :

$(E)\quad y'-y=e^{x}-1$

1- Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $xe^{x}+1$ est solution de (E).

2- φ étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que $(\varphi+h)$ est solution de (E) si et seulement si φ est solution de l'équation différentielle $(E')\quad y'-y=0$.

3- Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

4- Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

****