



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

وزارة التربية الوطنية

دورة: جوان 2015

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$.(1) أ) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.ب) بين أن النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.ج) استنتج أن النقطة D هي مرجح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.د) عين إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D .هـ) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (\mathcal{P}) المحوري للقطعة $[AE]$.(2) عين (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\|2\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|3\overline{MD} - 3\overline{MA}\|$.(3) أ) تحقق أن النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي (\mathcal{P}) .ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين G و H .حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثمّ احسب مساحته.(4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH) .أ) بين أن الشعاع \overline{AC} ناظمي للمستوي (AEH) .ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t; 4-2t; 5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم الجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t) = 2|t|\sqrt{14} uv$. (uv) وحدة الحجم.د) عين إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللتين يكون من أجلهما $v(t) = 2\sqrt{3} uv$.



التمرين الثاني: (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C, H و I لاحتقاتها

على الترتيب: $z_A = i, z_B = -2 + i, z_C = -3, z_H = -3 + 4i, z_I = -1 - i$.

(1) أ) مثل النقط A, B, C, H و I في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

ب) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .

(2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

(3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$.

ب) استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

ج) بيّن أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

(4) بيّن أن النقط G, H و I في استقامية.

(5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) بيّن أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

ج) أنشئ المجموعة (Γ) .

د) تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7.

(2) أ) بيّن أن 89 عدد أولي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

ج) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

(3) x و y عدنان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

عيّن x و y علماً أن:

(4) a, b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $PGCD(a; b^n) = 1$.

(يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر.)

ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1954^{1962} و 1962^{1954} .



التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x)=1-x^2 \ln x$.
 (\mathcal{C}_f) منحنى الدالة f الممثل في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

(3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.

(ب) تحقّق أنّ $1,531 < \alpha < 1,532$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x)=f(|x|)$.

(\mathcal{C}_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس شفعية الدالة g .

(ب) أنشئ المنحنى (\mathcal{C}_g) على المجال $[-2; 2]$.

(5) باستعمال الكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2 \ln x$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، والتي تتعدّم من أجل القيمة 1 .

(6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha[$. نضع $F(t) = \int_t^\alpha f(x) dx$.

(أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0; \alpha[$ ، $F(t) = \frac{-3t f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$.

(ج) احسب $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$.

(7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha[$.

$\mathcal{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أنّ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (\mathcal{C}_g) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما على الترتيب: $x = -\alpha$ و $x = \alpha$ ، هي: \mathcal{A} حيث: $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha) ua$

(ua وحدة المساحات) .

(أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A}$.

(ب) علماً أنّ $3,140 < \pi < 3,142$ أعط حصراً للعدد m .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل.

(1) الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

$$u_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{3}{2} \quad (\text{ج}) \quad ; \quad u_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{ب}) \quad ; \quad u_n = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 6 \quad (\text{أ})$$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z ، حيث

$$|iz - 1 - i| = 3 \quad (\text{أ}) \text{ دائرة نصف قطرها } 3 \text{ ولاحقة مركزها } 1+i.$$

$$(\text{ب}) \text{ دائرة نصف قطرها } 3 \text{ ولاحقة مركزها } 1-i.$$

$$(\text{ج}) \text{ دائرة نصف قطرها } 3 \text{ ولاحقة مركزها } -1+i.$$

(3) a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

\overline{abcd} عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد \overline{abcd} يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

$$(\text{أ}) \text{ العدد } (a - b + c - d) \text{ يقبل القسمة على } 11.$$

$$(\text{ب}) \text{ العدد } (a + b + c + d) \text{ يقبل القسمة على } 11.$$

$$(\text{ج}) \text{ العدد } \overline{cd} \text{ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على } 11.$$

(4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases} \quad ; (t \in \mathbb{R}); (k \in \mathbb{R})$$

هي: (أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(1; 2; -3)$.

(ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1; 2; -3)$ و $\vec{u} \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -2 \right)$ شعاع توجيه له.

(ج) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1; 2; -3)$ و $\vec{n}(3; -2; -1)$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0 \quad (\text{لاحظ أن: } (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3})$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي ، لاحتقائهما على الترتيب: $z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و $z_B = \overline{z_A}$



$$(2) \text{ أ) بيّن أن: } \frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$$

ب) استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

$$\text{ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين } \cos \frac{7\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{12}$$

(3) أ) حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $7x - 2y = 1$.
ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

ج) استنتج كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلولا للمعادلة $7x - 24y = 12$.

د) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2; 0; 0)$ و $B(-1; -5; -1)$.

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-1; 2; -1)$ شعاع توجيه له.

$$(\Delta_2) \text{ المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}(2; 5; 3)$ شعاع توجيه له.

(1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها.

(2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي.

(3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (\mathcal{P}) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

ب) استنتج أنّ $4x + 3y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (\mathcal{P}) .

ج) تحقّق من أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (\mathcal{P}) .

(4) أ) بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث تكون

النقط A ، I و D في استقامية؛ يُطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D .

ب) بيّن أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$.

(5) النقطة K مرجح الجملة المنقلة $\{(B; 1), (I; 2)\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على

المستوي (\mathcal{P}) .

أ) بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

ب) استنتج إحداثيات النقطة G .



التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ،
 (\mathcal{C}_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(3) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(4) (أ) بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$

(ب) استنتج أنّ المنحنى (\mathcal{C}_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

(5) g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(6) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$

(ب) استنتج وضعية المنحنى (\mathcal{C}_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(ج) أنشئ المنحنى (\mathcal{C}_f) .

(7) (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$

(ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(8) m عدد حقيقي. الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ:

$$h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - m x$$

(أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

(ب) باستعمال المنحنى (\mathcal{C}_f) ، ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة

$$h'_m(x) = 0$$