حل الموضوع الأول - باك 2016 - ع ت -

التمرين الأول : (4 ن)

1) يجب أن يكون $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا.

$\vec{n'}(1;-2;1)$ ، $\vec{n}(2;1;-1)$

منه $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$ منه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا

أي (P) و (P') متقاطعان.

2) $d(M;(P)) = d(M;(P'))$ معناه $(*)$

$(*)$ تكافئ $\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{1+4+1}}$

تكافئ $|2x+y-z+1| = |x-2y+z-2|$

تكافئ $2x+y-z+1 = x-2y+z-2$ أو $2x+y-z+1 = -x+2y-z+2$

تكافئ $x+3y-2z+3=0$ أو $3x-y-1=0$

(هنا استعملنا: $|x|=|y|$ معناه $x=y$ أو $x=-y$)

إذن (Γ) هي إتحاد المستويين ذو المعادلتين:

$x+3y-2z+3=0$ و $3x-y-1=0$

3) التحقق من أن A تنتمي إلى (Γ):

طريقة 1: $d(A;(P)) \overset{?}{=} d(A;(P'))$

$d(A;(P)) = \frac{|2(1)+(2)-0+1|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$

$d(A;(P')) = \frac{|1-2(2)-0-2|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$

إذن المسافتين متساويتين ومنه $A\in(\Gamma)$.

طريقة 2: نعوض مباشرة إحداثيات A في إحدى المعادلتين المحصل عليهما.

- إحداثيات A لا تحقق المعادلة $x+3y-2z+3=0$، ولكن تحقق المعادلة: $3x-y-1=0$

$3(1)-(2)-1 = 3-3 = 0$

بما أنه (Γ) هي إتحاد مستويين فلا بأس إذا حققت الإحداثيات معادلة واحدة فقط.

4) أ) تمثيل وسيطي لـ (AH):

$\vec{AH}$ هو شعاع توجيه لـ (AH) ومنه:

لأن $\vec{AH} // \vec{n}$ ((AH) عمودي على (P)).

$\vec{n}$ شعاع توجيه لـ (AH).

$$(AH): \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+2 \\ z = -t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

تمثيل وسيطي لـ (AH'):

$\vec{n'} // \vec{AH'}$ منه $\vec{n'}$ شعاع توجيه لـ (AH').

$\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ،
$$(AH'): \begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \\ z = k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$$

ب) إحداثيات كل من H و H':

$(P)\cap(AH) = \{H\}$ و $(P')\cap(AH') = \{H'\}$

الطريقة معروفة وهي تعويض x، y و z في معادلة كل من (P) و (P').

- بعد التعويض في (P) نجد: $t = -\frac{5}{6}$

منه $H\left(-\frac{2}{3} ; \frac{7}{6} ; \frac{5}{6}\right)$

- بعد التعويض في (P') نجد: $k = \frac{5}{6}$

منه: $H'\left(\frac{11}{6} ; \frac{1}{3} ; \frac{5}{6}\right)$

ج) $I\left(\frac{7}{12} ; \frac{3}{4} ; \frac{5}{6}\right)$

مساحة AHH':

نعلم أنه $A\in(\Gamma)$ إذن A متساوية المسافة عن (P) و (P') ومنه المثلث AHH' مثلث متساوي الساقين: $AH = AH'$

$\vec{HH'}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{6}\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{IA}\begin{pmatrix}\frac{5}{12}\\\frac{5}{4}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

$S_{AHH'} = \frac{1}{2} HH' \times IA$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}\sqrt{10} \times \frac{5\sqrt{14}}{12}$

$= \frac{25}{72}\sqrt{35}$

فايسبوك : الأستاذ سيدي عيسى

التمرين الثاني : (5 ن)

I) $f(x)=\sqrt{2x+8}$

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$.

ب) اتجاه التغير وجدول التغيرات :

$x\in]0;+\infty[$ $\quad f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{2\sqrt{2x+8}}$

واضح أنه $f'(x)>0$ لأن كل من البسط والمقام موجب ($\sqrt{2x+8}>0$)

منه f دالة متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$ ↗	$+\infty$

ج) $(C)\cap(D)=?$

كما نعلم في إيجاد التقاطع نقوم بحل جملة معادلتيه وهي :

$$\begin{cases} (C)\longrightarrow y=f(x) \\ (D)\longrightarrow y=x \end{cases} \quad (*)$$

(*) منه $f(x)=x$

منه $\sqrt{2x+8}=x$

منه $2x+8=x^2$ و $x\geq 0$

منه $x^2-2x-8=0$ و $x\geq 0$

$\Delta=36$ ، $x_1=-2$ ، $x_2=4$

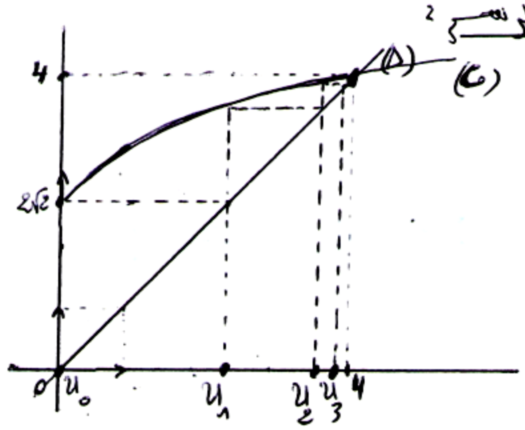
x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

(هنا نحذف المجال الذي لا نستعمله أي نترك فقط المجال $[0;+\infty[$).

إذن الحل هو : $x=4$.

$(C)\cap(D)=\{(4;4)\}$

3) الرسم :



II) $u_0=0$ ، $u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{2u_n+8}$

1) التمثيل : أنظر الرسم .

2) التخمين : (u_n) متزايدة تماما على IN .

(u_n) متقاربة نحو 4 .

3) أ) البرهان بالتراجع $0\leq u_n<4 \longleftarrow P(n)$

$n=0$ ، $u_0=0$ و $0\leq 0<4$ إذن $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن : $0\leq u_n<4$

نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أنه ، $0\leq u_{n+1}<4$

ننطلق من الفرضية :

$0\leq u_n<4$ منه $f(0)\leq f(u_n)<f(4)$
(لأنه f متزايدة تماما)

منه $0\leq 2\sqrt{2}\leq u_{n+1}<4$

منه $0\leq u_{n+1}<4$

منه $P(n+1)$ صحيحة .

إذن من أجل كل n من IN : $0\leq u_n<4$.

ب) اتجاه تغير (u_n) :

(الضرب في المرافق) $\quad u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n$

$$=\frac{(\sqrt{2u_n+8}-u_n)(\sqrt{2u_n+8}+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$$

$$=\frac{-u_n^2+2u_n+8}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي من إشارة البسط فقط لأن المقام موجب تماما (مجموع عددين موجبين)

$\Delta=36$ $\quad u_n=-2$ أو $u_n=4$

u_n	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
البسط		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

(لأن $0\leq u_n<4$).

إذن (u_n) متزايدة تماما على IN .

ج) $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}$

بعد الضرب في المرافق نجد :

$4-u_{n+1}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}$

$$4-U_{n+1}=\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}(4-U_n)$$

نبين فقط أنه: $\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{1}{2}$

- في هذه الحالات ماذا نستعمل ؟
نأخذ الوسخ وننطلق من الذي نريد البرهان عليه حتى نصل إلى مساواة أو علاقة صحيحة بديهية (معروفة ومحققة)
هنا ننطلق من المطلوب:

$\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{1}{2}$ منه $\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}-\frac{1}{2}\leq 0$

منه $\frac{4-4-\sqrt{2U_n+8}}{2(4+\sqrt{2U_n+8})}\leq 0$

منه $-\sqrt{2U_n+8}\leq 0$
(لأنه المقام موجب تماما).

منه $\sqrt{2U_n+8}\geq 0$

وهذا معروف ومحقق دوما.

إذن نرجع للورقة وننطلق من العلاقة البديهية وهي: $\sqrt{2U_n+8}\geq 0$ (الجذر موجب دوما)

$\sqrt{2U_n+8}\geq 0$ منه $4+\sqrt{2U_n+8}\geq 4$

منه $\frac{1}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{1}{4}$

منه $\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{2}{4}$

منه $\frac{2}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{1}{2}$

منه $\frac{2(4-U_n)}{4+\sqrt{2U_n+8}}\leq\frac{1}{2}(4-U_n)$

(ضربنا الطرفين في $4-U_n$ وهو موجب
لأنه: $U_n<4$ منه $4-U_n>0$).

منه $4-U_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-U_n)$.

• استنتاج: $4-U_n\leq\frac{1}{2^n}(4-U_0)$

لدينا: $4-U_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-U_n)$

وهذا من أجل كل n من IN وإذا يمكن أن نكتب:

$4-U_1\leq\frac{1}{2}(4-U_0)$

و $4-U_2\leq\frac{1}{2}(4-U_1)$

و $4-U_3\leq\frac{1}{2}(4-U_2)$

دائما ننقص 1 من الدليل

وهكذا ..... $4-U_n\leq\frac{1}{2}(4-U_{n-1})$

إذا لدينا: $4-U_n\leq\frac{1}{2}(4-U_{n-1})$

$\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(4-U_{n-2})$

$\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(4-U_{n-3})$

⋮

$\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-U_{n-n})$

$4-U_n\leq\frac{1}{2^n}(4-U_0)$

نلاحظ أن $\frac{1}{2}$ يتكرر بنفس العدد الذي ننقصه من n في الدليل (في الطرف الثاني).

إذن $4-U_n\leq\frac{1}{2^n}(4-U_0)$ منه $\lim(4-U_n)\leq 0$ و

منه $\lim(4-U_n)=0$ (لأنه $\lim\frac{1}{2^n}=0$).

منه $\boxed{\lim U_n=4}$

التمرين الثالث: (4,5 ن)

1) $z'=z$ معناه $\frac{z-2}{z-1}=z$ $(z\neq 1)$

معناه $(z-1)z=z-2$

معناه $z^2-2z+2=0$

$\Delta=-4=4i^2=(2i)^2$

الجذران التربيعيان لـ Δ هما: $2i$ ، $-2i$.

$z_1=1-i$ ، $z_2=1+i$

$S=\{1-i\,;\,1+i\}$

2) $z_1=z_A=1-i$ ، $z_2=z_B=\overline{z_1}=1+i$

أ) $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dots=i$

إذن: $\boxed{\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}}$

ب) $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}.z_1$

معناه $z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$

بالمطابقة مع الصيغة المركبة $z' = az$

نجد أن B هي صورة A بالدوران الذي مركزه المبدأ O $(b=0)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

3) $z' \neq z$ ، $z_C = 2$ ، $z_D = 1$

تعيين (Γ):

$M' \in (OY)$ معناه z' تخيلي صرف - $(z = x+iy)$

معناه $\frac{z-2}{z-1}$ تخيلي صرف.

$$\frac{z-2}{z-1} = \frac{(z-2)(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{z\bar{z} - z - 2\bar{z} + 2}{z\bar{z} - z - \bar{z} + 1}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x-iy-2x+2iy+2}{x^2+y^2-x-iy-x+iy+1}$$

$$= \frac{x^2+y^2-3x+2}{x^2+y^2-2x+1} + i\frac{y}{x^2+y^2-2x+1}$$

$\frac{z-2}{z-1}$ تخيلي صرف معناه $x^2+y^2-3x+2=0$

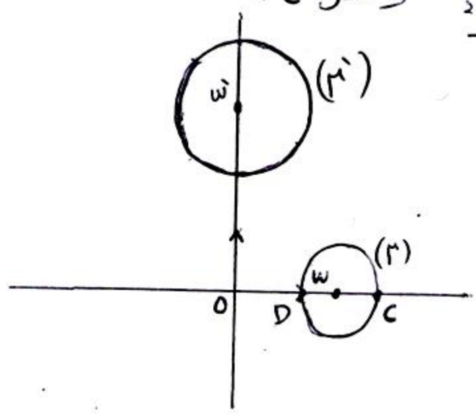
و $(x;y) \neq (1;0)$

منه $(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + y^2 + 2 = 0$

منه $(x-\frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

إذن (Γ) هي دائرة مركزها $w(\frac{3}{2};0)$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $D(1;0)$ لأن إحداثياتها تعدم المقام $(z \neq 1)$ وتشمل C.

الإنشاء:



4) أ) $S = h \circ R$ هو تشابه مباشر (حسب التحليل القانوني للتشابه المباشر) مركزه المبدأ O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لأن النسبة موجبة).

ب) العبارة المركبة:

بما أن المبدأ هو المركز فإنه:

S: $\boxed{z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.z}$

جـ) (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S إذن (Γ') هي دائرة مركزها صورة المركز الأول وهو w إذن w' صورة w هي مركز (Γ') فنكتب:

$z_{w'} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.z_w$

نصف قطر (Γ') هو r' المعطى بـ:

$r' = 2.r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$z_{w'} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z_w = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{3}{2} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

إذن $w'(0;3)$

التمرين الرابع: (6,5 ن)

I) $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$= \frac{2x^2-1}{x}$

$g'(x) = 0$ معناه $2x^2 - 1 = 0$

معناه $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

معناه $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
					$-$	0	$+$	

و متناقصة على $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتزايدة على $[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln\sqrt{2}$	$\nearrow$	

ملاحظة: جدول التغيرات غير مطلوب ولكن يساعدنا في الاستنتاج.

2) $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{2} > 0$ (واضح)

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى تساوي $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$

إذا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\geq g(\frac{\sqrt{2}}{2})$

أي $g(x)\geq \frac{3}{2}+\ln\sqrt{2}>0$

منه $g(x)>0$.

II) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

1) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ منه $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$

منه $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

2) أ) $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ (العمل)

ب) إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب تماما

وبما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)>0$

منه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

ملاحظة: لأنه هنا لا نذكر اتجاه تغير الدالة f لأنه لم يطلب منا ذلك

3) $(T):\ \boxed{y=2x-2}=2(x-1)$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

إذا (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C).

ب) الوضعية: $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$

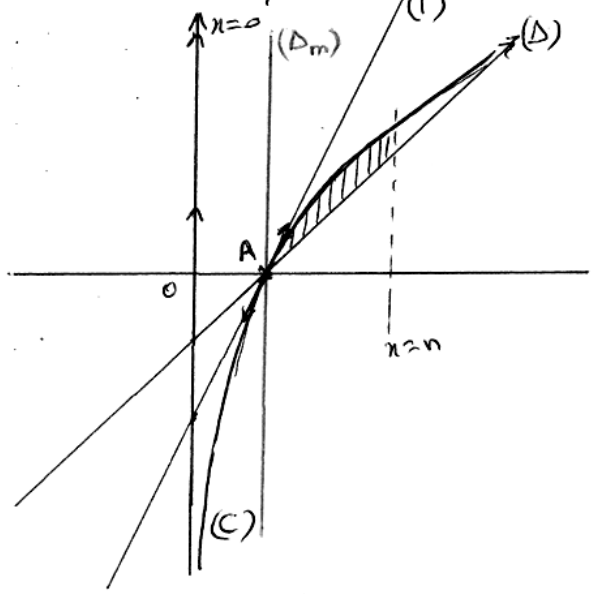
المقام موجب منه إشارة الفرق هي من إشارة البسط أي: $\ln x$

وحسب الدرس فإن:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) تحت (Δ)	$(C)\cap(\Delta)=A(1;0)$	(C) فوق (Δ)	

5) الرسم

معادلة المستقيم المقارب لـ (C): $x=0$



6) $(\Delta_m):\ y=mx-m$

أ) لدينا: $m(1)-m=m-m=0$

إذا $A\in(\Delta_m)$.

ب) حلول المعادلة $f(x)=mx-m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع (Δ_m).

هذه مناقشة بيانية دورانية لأن معامل التوجيه وهو معامل x أي m يتغير في $\mathbb{R}$، ولاحظ أن Δ_m له علاقة بالمماس (T) لما $m=2$ و بالمستقيم المقارب لما $m=1$ والكل يتقاطع في A

إذا A هي مركز الدوران.

اعلم أنه لما يكون m بجوار $-\infty$ أو $+\infty$ يكون دائما (Δ_m) عموديا ويشمل A (أنظر الرسم)، ويكون الدوران في الاتجاه المباشر

$m\in]-\infty;1]$ يوجد حل واحد.

$m\in]1;2[$ يوجد حلين.

$m\in[2;+\infty[$ يوجد حل واحد.

7) أ) لاحظ أن: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$

وهي على الشكل: $u'\times u$ ومنه الدالة الأصلية هي: $\boxed{x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2+c}$ ، $c\in\mathbb{R}$

1) $I_n = \int_1^n [f(x)-(x-1)]\, dx$

$= \int_1^n \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n$

$= \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$\boxed{I_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 \quad u.a}$

2) $n > n_0$ (ننطلق من الشرط).

$I_n > 2$ منه $\frac{1}{2}(\ln n)^2 > 2$

منه $(\ln n)^2 > 4$

منه $\ln n > 2$ (لأن $n > 1$ منه $\ln n > 0$).

منه $n > e^2$

بما أن n طبيعي فإن أصغر عدد طبيعي n_0 هو : $n_0 = 8$ لأن $n_0 < n$

(لأن أصغر عدد طبيعي n أكبر من e^2 هو 9).

ايسولد . الأستاذ سيديا عديس

طريقة ثانية للسؤال 3 من التمرين الثالث

$M' \in (OY)$ معناه z' تخيلي صرف.

معناه $\frac{z-2}{z-1}$ تخيلي صرف.

منه $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

منه $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

منه (Γ) هي الدائرة ذات القطر $[CD]$.

تصحيح الموضوع الثاني - ت ع - 2016

التمرين الأول: (4,5 ن)

1) أ) التمثيل الوسيطي لـ (Δ):

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب) لنبين أن (D) و (Δ) متعامدان يكفي أن نبين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان. $\vec{u}(-2;1;1)$ ، $\vec{v}(3;2;4)$

$\vec{u}$: شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{v}$ شعاع توجيه لـ (D).

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2(3)+1(2)+1(4) = -6+6 = 0$$

إذن (D) و (Δ) متعامدان.

- $(D) \cap (\Delta) \overset{?}{=} \{C\}$

طريقة 1: نبين أن $C \in (D)$ و $C \in (\Delta)$ وذلك بتعويض إحداثيات C في التمثيلين.

- بالنسبة إلى (D):

$$\begin{cases} 1 = 1 + 3k \\ 1 = 1 + 2k \\ 0 = 4k \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

و k وحيد إذن $C \in (D)$

- بالنسبة إلى (Δ):

$$\begin{cases} 1 = -2t + 5 \\ 1 = t - 1 \\ 0 = t - 2 \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

و t وحيد إذن $C \in (\Delta)$

أي: C هي نقطة تقاطع (D) و (Δ).

طريقة 2: ندرس تقاطع (D) و (Δ).

$$\begin{cases} 1+3k = -2t+5 \quad \cdots ① \\ 1+2k = t-1 \quad \cdots ② \\ 4k = t-2 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

منه بطرح ③ من ② نجد: $k = 0$ وبعد تعويضها في ② نجد $t = 2$

نستعمل ① للتحقق فقط ومنه بعد تعويض $k = 0$ في التمثيل الوسيطي نجد إحداثيات C ونفس الشيء بالنسبة إلى t.

2) أ) يجب أن يكون $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا وهما $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعي توجيه كل من (D) و (Δ).

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = (-2)(+2)+1(11)+1(-7) = 11-11 = 0$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = 2(3)+11(2)-7(4) = 28-28 = 0$$

إذن $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P)

- معادلة ديكارتية لـ (P): (P) يشمل C.

طريقة 1: $M(x;y;z) \in (P)$ معناه $\vec{CM}\cdot\vec{n} = \vec{0}$

معناه: $\boxed{2x+11y-7z-13=0}$

طريقة 2:

$$(P): 2x+11y-7z+d=0$$

$C \in (P)$ معناه $2(1)+11(1)-7(0)+d=0$

منه $d = -13$

إذن: $(P): \boxed{2x+11y-7z-13=0}$

ب) C هي المسقط العمودي لـ B على (P):

طريقة 1:

أولا لدينا: $C \in (P)$ (من 2 - أ).

ثم نبين أن $\vec{BC}\begin{pmatrix}-2\\-11\\7\end{pmatrix}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

لدينا: $\frac{-2}{2} = \frac{-11}{11} = \frac{-7}{7}$ ومنه $\vec{BC}$ ، $\vec{n}$ مرتبطان خطيا

إذن C هي المسقط العمودي لـ B على (P).

طريقة 2:

أولا لدينا: $C \in (P)$ (من 2 - أ).

ثم نبين أن: $d(B;(P)) = BC$

$$d(B;(P)) = \frac{|2(3)+11(12)-7(-7)-13|}{\sqrt{4+121+49}}$$

$$= \frac{174}{\sqrt{174}} = \sqrt{174}$$

$$BC = \sqrt{4+121+49} = \sqrt{174}$$

وإذن C هي المسقط العمودي لـ B على (P)

3)

$$(P'): \begin{cases} x = 3 - \beta \quad \cdots\cdots ① \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \quad \cdots ② \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \quad \cdots ③ \end{cases}$$

أ) (P') هو مستوي:

الجملة تكافئ

$$\begin{cases} x - 3 = -\beta \\ y - 12 = 12\alpha + 9\beta \\ z + 7 = -6\alpha - 11\beta \end{cases}$$

(دمج المعاملات موجود)

منه $\vec{BM} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{w'}$

يكفي أن نبين أن $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\12\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{w'}\begin{pmatrix}-1\\9\\-11\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا وهما كذلك لأن: $\frac{0}{-1} \neq \frac{12}{9}$

وإذن (P') مستوي يشمل B.

- $13x - y - 2z - 41 = 0$ هي معادلة لـ (P'):

طريقة 1: نعوض x ، y و z من التمثيل الوسيطي لـ (P') في المعادلة المعطاة

$$13(3-\beta)-(12+12\alpha+9\beta)-2(-7-6\alpha-11\beta)-41 =$$

$= 5\cancel{\beta} - 5\cancel{\beta} - \cancel{2\alpha\beta} + \cancel{2\alpha\beta} - \cancel{12\alpha} + \cancel{12\alpha} = 0$

وإذن المعادلة المعطاة هي لـ (P').

<u>طريقة 2</u>: الإنتقال من التمثيل الوسيطي إلى معادلة ديكارتية.

من الجملة نأخذ المعادلتين ① و ② فقط ونجد نجد حلها:

$$\begin{cases} \beta = 3 - x \\ y = 12 + 12\alpha + 9(3-x) \end{cases}$$

منه

$$\begin{cases} \beta = 3 - x \\ \alpha = \frac{1}{12}y + \frac{9}{12}x - \frac{39}{12} \end{cases}$$

بعدها نعوض α و β في المعادلة ③ فنجد:

$$78x - 6y - 12z - 246 = 0$$

بعد القسمة على 6 نجد: $13x - y - 2z - 41 = 0$.

<u>طريقة 3</u>:

نبين أن $\vec{n}(13;-1;-2)$ عمودي على $\vec{w}$ و $\vec{w'}$ (الموجودان سابقا) ونتأكد من أن إحداثيات B تحقق المعادلة المعطاة.

ب) <u>احداثيات D</u>:

نعوض x، y و z من التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة (P') فنجد:

$R = 1$ منه $\boxed{D(4;3;4)}$

<u>احداثيات E</u>: بنفس الطريقة نجد:

$t = 2$ منه $\boxed{E(3;0;-1)}$

ج) <u>حجم الرباعي $BCDE$</u>:

نأخذ المثلث CDE كقاعدة وهو مثلث قائم في C لأن (Δ) و (D) متعامدان.

$\vec{CD}(3;2;4)$

$\vec{CE}(2;-1;-1)$

$$V = \frac{1}{3} S_{CDE} \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times CD \times CE \times BC$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \sqrt{6} \times \sqrt{174}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{29}$$

$$\boxed{V = 29 \ u.v}$$

www.math46.forumalgerie.net

الصفحة على الفايسبوك: الأستاذ سيد يا عيسى

التمرين الثاني: (4ن)

I) $f(x) = \dfrac{5x}{x+2}$

1) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

ب) $f'(x) = \dfrac{10}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ منه f متزايدة على $[0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 5$

2) <u>نبين أن: $f(x) \geq 0$</u>:

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \geq f(0)$ أي: $f(x) \geq 0$

<u>تعبير آخر</u>:

f دالة متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وإذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \geq f(0)$ أي: $f(x) \geq 0$

II) $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{u_n+2} = f(u_n)$

1) <u>$1 \leq u_n \leq 3$</u> $\longleftarrow P(n)$

$n = 0$ ، $u_0 = 1$ و $1 \leq 1 \leq 3$ وإذن $P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن: $1 \leq u_n \leq 3$

نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن: $1 \leq u_{n+1} \leq 3$؟

(كما ذكرنا سابقا ننطلق من الفرضية ونستعمل الأسئلة السابقة).

$1 \leq u_n \leq 3$ منه $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ (لأن f متزايدة تماما)

منه $\frac{5}{3} \leq f(u_n) \leq 3$ $\quad (\frac{5}{3} \simeq 1{,}6)$

منه $1 \leq \frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

منه $P(n+1)$ صحيحة.

وإذن من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $1 \leq u_n \leq 3$

ب) ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 4u_n}{u_n+2}$$

$1 \leq u_n \leq 3$ منه $3 \leq u_n + 2 \leq 5$

منه $u_n + 2 > 0$

يكفي دراسة إشارة البسط فقط.

$-u_n^2 + 4u_n = 0$ معناه $u_n = 0$ أو $u_n = 4$.

u_n	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
$-u_n^2+4u_n$		$-$	0			$+$			0	$-$	

بما أن $1 \leq u_n \leq 3$ فإن $-u_n^2+4u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

• (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 3

إذن هي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ .

2) $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ ومنه $\boxed{u_n = \frac{3}{1-v_n}}$

أ) (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{5u_n}{u_n+2}}$$

$$= 1 - \frac{3(u_n+2)}{5u_n} = \frac{5u_n - 3u_n - 6}{5u_n}$$

$$= \frac{2u_n - 6}{5u_n} = \frac{2(u_n-3)}{5u_n} = \frac{2}{5}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = \frac{2}{5} \cdot v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول v_0 حيث : $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = 1 - 3 = -2$

طريقة أخرى :
(تعويض u_n)

$$v_{n+1} = \dots = \frac{2u_n - 6}{5u_n}$$

$$= \frac{\frac{6}{1-v_n} - 6}{\frac{15}{1-v_n}} = \frac{6 - 6(1-v_n)}{\cancel{1-v_n}} \times \frac{\cancel{1-v_n}}{15}$$

$$= \frac{6v_n}{15} = \frac{6}{15} v_n = \frac{2}{5} v_n$$

ب) عبارة v_n و u_n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$u_n = \frac{3}{1-v_n} = \frac{3}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n} \quad \dots\dots \ (*)$$

جـ) نهاية u_n :

$\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ومنه $\boxed{\lim u_n = 3}$

3) حساب S_n :

طريقة 1 : كما ذكرنا نعوض فقط .

لدينا :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{3}$$

(مقلوب $*$)

ومنه $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$S_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^0\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^1\right) + \dots + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}\right)}_{\text{(n+1) مرة}} + \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^0 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1) + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{5} - 1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}(n+1) - \frac{10}{9}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right)}$$

أو

$$= \boxed{\frac{1}{3}(n+1) + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}$$

ملاحظة : $(n+1)$ هو عدد الحدود .

طريقة 2 :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$= -2 \times \frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$= -\frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$v_0 = 1 - \frac{3}{u_0}$$

$$v_1 = 1 - \frac{3}{u_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$$

بالجمع نجد :

$$-\frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{(n+1) مرة}} - 3\left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}\right)$$

ومنه $-\frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) = (n+1) - 3S_n$.

ومنه $3S_n = (n+1) + \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

ومنه $\boxed{S_n = \frac{1}{3}(n+1) + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}$.

الصفحة على الفايسبوك : الأستاذ سيدنا حبيب

التمرين الثالث : (4,5 ن)

1) حل المعادلة :

$z^2+\sqrt{3}z+1=0$ أو $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\Delta=-1=i^2$

الجذران التربيعيان لـ Δ هما : i ، $-i$

$z_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_1=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$$

2) $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_C=\overline{z_B}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

أ) $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_C=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ب) بما أن $C\neq B$ و $A\neq B$ ($z_A\neq z_B$ و $z_C\neq z_B$) فإنه يوجد تشابه مباشر يحول C إلى A و B إلى B (مركزه B).

العناصر المميزة :

- المركز : B
- النسبة و الزاوية :

$A=S(C)$ معناه $z_A-z_B=a(z_C-z_B)$

معناه $a=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

منه $\boxed{a=\sqrt{3}i}$

$|a|=\sqrt{3}$ ، $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

النسبة : $\sqrt{3}$ الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

طريقة ثانية : (من الدرس)

النسبة : $\begin{cases}A=S(C)\\B=S(B)\end{cases}$ منه $\begin{cases}\frac{AB}{CB}=\text{النسبة}\\(\vec{BC};\vec{BA})=\theta\end{cases}$

$\frac{AB}{CB}=\dots=\sqrt{3}$

$$(\vec{BC};\vec{BA})=\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\arg(\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{2}$$

3) أ) حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

يجب أن يكون : $\vec{AB}=\vec{DC}$ أي

$z_B-z_A=z_C-z_D$ منه $z_D=z_C-z_B+z_A$

منه $\boxed{z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

طبيعة $ABCD$:

بما أنه S يحول C إلى A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

فإنه : $(\vec{BC};\vec{BA})=\frac{\pi}{2}$ و النسبة هي $\sqrt{3}$

نستنتج أنه $AB\neq BC$ و الرباعي $ABCD$ مستطيل .

ب) $(E):\ |z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$ ...... (1)

طريقة 1 : نضع : $z=x+iy$

$|z-z_A|=|x+iy-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i|$

$=\sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}$

$=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{3}x-y+1}$

$|\bar{z}-z_B|=|x-iy+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i|$

$=\sqrt{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-y-\frac{1}{2})^2}$

$=\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}x+y+1}$

(1) تكافئ $\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{3}x-y+1}=\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}x+y+1}$

منه بعد التربيع و ارجاعها صفرية نجد :

$\boxed{-\sqrt{3}x-y=0}$ أو $\boxed{y=-\sqrt{3}x}$ (بعد الاختزال على 2)

وإذا (E) هي مستقيم ذو معادلة : $y=-\sqrt{3}x$

طريقة 2 :

من خواص المرافق : $|\bar{w}|=|w|$ منه

$|\bar{z}-z_B|=|\overline{\bar{z}-z_B}|$ معناه $|\bar{z}-z_B|=|z-\bar{z}_B|$

معناه $|\bar{z}-z_B|=|z-z_C|$

وإذا (1) تكافئ $|z-z_A|=|z-z_C|$

تكافئ $AM=CM$

(E) هي محور القطعة $[AC]$.

ج) $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ معناه $z-z_B=\sqrt{3}e^{i\theta}$

منه $\begin{cases}BM=\sqrt{3}\\(\vec{u};\vec{BM})=\theta\end{cases}$

لما يتغير θ في $\mathbb{R}$ نلاحظ أنه المسافة BM ثابتة لا تتغير و تساوي $\sqrt{3}$ وإذا (Γ) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

• نحسب AB نجد : $AB=\sqrt{3}$ و هو نصف القطر

وإذا $A\in(\Gamma)$.

التمرين الرابع: (7ن)

I) $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty}\left[1+x^2e^{-x}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+x^2e^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{x^2}{e^x}\right]$

$=1$

($\frac{x^2}{e^x}$ هو مقلوب $\frac{e^x}{x^2}$)

ب) $g'(x)=(-x^2+x+2)e^{-x}$

$g'(x)=0$ منه $-x^2+x+2=0$

$\Delta=9$

$x_1=2$ ، $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

g متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$ ومتزايدة على $[-1;2]$.

x	$-\infty$	α	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	$1-e$	↗ 0	$1+5e^{-2}$	↘ 1

ج) أ) $g(0)=0$ منه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

$g(-1,51)\simeq$ ، $g(-1,52)\simeq$

من جدول التغيرات نلاحظ أن g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-1,52;-1,51[$ و $g(-1,52)\times g(-1,51)<0$ إذاً حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]-1,52;-1,51[$ ويحقق $g(\alpha)=0$.

ب) من جدول التغيرات ومن الأسئلة ينتج:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$

1) أ) النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\underset{+\infty}{-x}+(\underset{+\infty}{x^2+3x+2})\underset{+\infty}{e^{-x}}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\underset{0}{\frac{x^2}{e^x}}\right]=-\infty$

ب) $f'(x)=-1+\left[(x^2+3x+2)e^{-x}\right]'$

$=-1+(2x+3)e^{-x}-e^{-x}(x^2+3x+2)$

$=-1+(-x^2-x+1)e^{-x}$

$=-\left(1+(x^2+x-1)e^{-x}\right)$

$=-g(x)$

جـ)

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	2	↘	$-\infty$

2) أ) f قابلة للإشتقاق على IR (حدود ومجموع دوال قابلة للإشتقاق على IR) إذاً خاصة قابلة للإشتقاق عند α ومنه:

$\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي (OX). (العدد المشتق معدوم)

ج) أ) (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}=0$

ب) الوضعية:

ندرس إشارة $f(x)-y=(x^2+3x+2)e^{-x}$

$\Delta=9-8=1$

$x_1=-2$ ، $x_2=-1$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\{(-2;2)\}$	(C_f) تحت (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\{(-1;1)\}$	(C_f) فوق (Δ)	

3) جـ) نقطتي انعطاف:

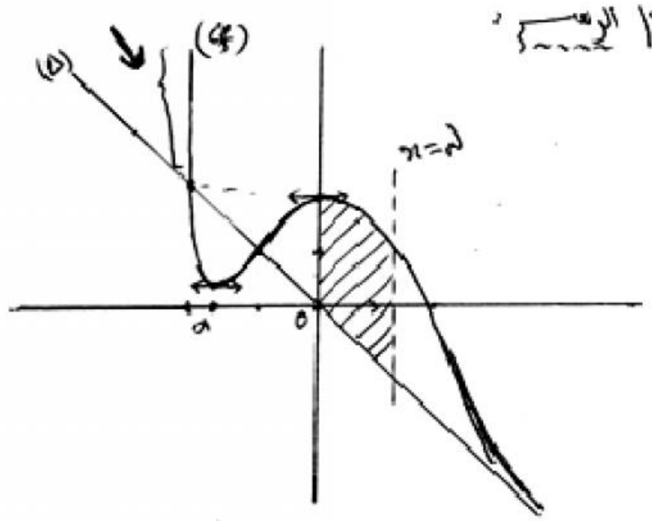
نستعمل المشتقة الثانية: $f''(x)=-g'(x)$

إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة $g'(x)$ ومنه:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية تنعدم عند -1 و 2 مغيرة إشارتها إذن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف وهما: $A(-1;1)$ ، $B(2;12e^{-2}-2)$

3) الرسم:



4) $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0 \quad \ldots\ldots (1)$

(1) تكافئ $(x^2+3x+2)=-(m-x)e^{x}$

تكافئ $(x^2+3x+2)e^{-x}=-(m-x)e^{x}\times e^{-x}$

تكافئ $(x^2+3x+2)e^{-x}=-m+x$

تكافئ $-x+(x^2+3x+2)e^{-x}=-m$

تكافئ $f(x)=-m$

حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$

نضع $m'=-m$ ومنه $m=-m'$

$m'\in]-\infty;0{,}38[$ ومنه $m\in]-0{,}38;+\infty[$ يوجد حل واحد موجب.

$m'=0{,}38$ ومنه $m=-0{,}38$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة.

$m'\in]0{,}38;2[$ ومنه $m\in]-2;-0{,}38[$ يوجد ثلاث حلول (اثنان سالبان والآخر موجب)

$m'=2$ ومنه $m=-2$ يوجد حلان (واحد معدوم والآخر سالب).

$m'\in]2;+\infty[$ ومنه $m\in]-\infty;-2[$ يوجد حل واحد سالب.

ملاحظة: هذه المناقشة على $\mathbb{R}$ (أي $x\in\mathbb{R}$) لكن في السؤال طلب منا فقط على المجال $[-2;+\infty[$ أي من أجل $x\in[-2;+\infty[$ أي نحذف الجزء من (C_f) العلوي المشار إليه بسهم ومنه نحذف فقط من المناقشة الحلول هي من أجل $m'\in]2;+\infty[$.

III) $h(x)=x+f(x)$ ، $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

1) تعيين a و b و c :

H دالة أصلية لـ h معناه $H'(x)=h(x)$

$$H'(x)=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

بالمطابقة مع $h(x)$ نجد:

$$\begin{cases}-a=1\\ 2a-b=3\\ b-c=2\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases}a=-1\\ b=-5\\ c=-7\end{cases}$$

علما أن: $h(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}$

2) أ) $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)\,dx \quad (\lambda>0)$

$$=[H(x)]_0^{\lambda}$$

$$\boxed{A(\lambda)=7+(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}}$$

التفسير الهندسي: (أنظر الجزء المظلل).

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}(x+f(x))\,dx$$

$$=\int_0^{\lambda}(f(x)-(-x))\,dx$$

$$=\int_0^{\lambda}(f(x)-y)\,dx$$

$A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\lambda$

ب) النهاية:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}(7-\lambda^2e^{-\lambda})$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\Big(7-\underbrace{\frac{\lambda^2}{e^{\lambda}}}_{0}\Big)=7$$

الصفحة على الفايسبوك : الأستاذ سيدي عيسى