Polynésie S, correction

13 juin 2014 4 heures

Exercice 1 5 points

Commun à tous les candidats
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5;-5;2),\quad B(-1;1;0),\ C(0;1;2),\quad \text{et } D(6;6;-1)$$

1. Nature du triangle BCD :

$$\left\{\begin{array}{l} BC^2=(0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2=5\\ CD^2=(6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2=70\\ BD^2=(6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2=75\end{array}\right. \Longrightarrow BD^2=BC^2+CD^2 \Longrightarrow \text{BCD est rectangle en C}$$

2. Son aire est : $\dfrac{BC\times CD}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{14}$.

   a) Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) :

   $$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=1\times(-2)+0\times3+2\times1=0 \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=6\times(-2)+5\times3+(-3)\times1=0$$

   Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (BCD est un triangle rectangle non aplati), $\overrightarrow{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.

   b) Équation cartésienne du plan (BCD) :
   - L'équation est de la forme $-2x+3y+z+d=0$;
   - B appartient au plan, donc $-2(-1)+3(1)+(0)+d=0 \Longleftrightarrow d=-5$;
   - une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x+3y+z-5=0$.

3. Représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$) et passant par le point A :

$$\left\{\begin{array}{l} x=5-2t\\ y=-5+3t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}\\ z=2+t\end{array}\right.$$

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (BCD).

$$\left\{\begin{array}{l} x=5-2t\\ y=-5+3t\\ z=2+t\\ -2x+3y+z-5=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-2t\\ y=-5+3t\\ z=2+t\\ -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t)-5=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-2(2)=1\\ y=-5+3(2)=1\\ z=2+2=4\\ t=2\end{array}\right.$$

Ainsi, les coordonnées de H sont : $(1;1;4)$.

5. Volume du tétraèdre ABCD :
[AH] est la hauteur du tétraèdre, car A est sur la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de $\mathscr{D}$ et (BCD), donc la projection orthogonale de A sur (BCD).
$\mathscr{B} = 5\sqrt{7}$; $h = \text{AH} = \sqrt{(5-1)^2+(-5-1)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{14}$; donc :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}\times h = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{14}\times\frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{70}{3}$$

6. Mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$:

$$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-6\\6\\-2\end{pmatrix};\ \text{AB} = \sqrt{(-6)^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{76};\ \overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix};\ \text{AB} = \sqrt{(-5)^2+6^2+(0)^2} = \sqrt{61};$$

$$\cos\widehat{\text{BAC}} = \frac{\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AC}}}{\text{AB}\times\text{AC}} = \frac{(-6)\times(-5)+6\times6+(-2)\times0}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \simeq 0,97 \Longrightarrow \text{mes}\widehat{\text{BAC}} \simeq 14,2 \text{ au dixième de degré près}$$

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. $u_1 = u_0 = 2\times0+2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2\times1+2 = 6$.
2. **Le second affiche en sortie la valeur de** u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.
3. Étude de la suite (u_n) :

   a) La suite (u_n) semble être croissante.
   Démonstration :

   $$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n+2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

   b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

   $$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a\times0^2+b\times0+c=0\\ u_1 = a\times1^2+b\times1+c=2\\ u_2 = a\times2^2+b\times2+c=6\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=2\\ 4a+2b=6\\ c=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=2\\ 2a+b=3\\ c=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=1\\ c=0\end{array}\right.$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n+2$.

   a) C'est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

   b) On définit, pour tout entier naturel n, $\text{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

   $$\text{S}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0+v_1+\cdots+v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2}\times r = 2(n+1)+n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\text{S}_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

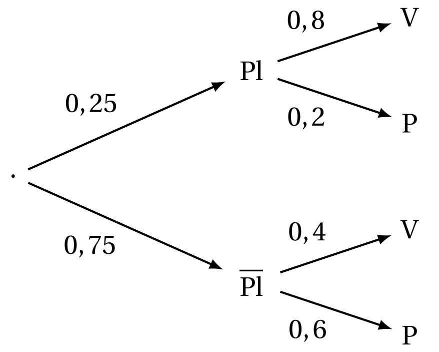
   $$\text{S}_n = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \cdots + (\cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}}) + (u_{n+1} - \cancel{u_n}) = u_{n+1} - u_0$$

   $$\text{S}_{n-1} = u_n - u_0 \Longleftrightarrow u_n = \text{S}_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

Exercice 3, 5 points

Commun à tous les candidats

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.
   Affirmation n° 1 : VRAIE
   Arbre de probabilités :



Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

On cherche $p(\text{V})$:

$$\begin{aligned} p(\text{V}) &= p(\text{V} \cap \text{Pl}) + p(\text{V} \cap \overline{\text{Pl}}) \\ &= p_{\text{Pl}}(\text{V}) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(\text{V}) \times p(\overline{\text{Pl}}) \\ &= 0,8 \times 0,25 + 0,4 \times 0,75 = 0,5 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
   Affirmation n° 2 : VRAIE
   A et B sont indépendants signifie que $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p(\text{B})$:

   $p(\text{A}) = p(\text{A}\cap\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = p(\text{A}) \times p(\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) \Longrightarrow p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = p(\text{A}) - p(\text{A}) \times p(\text{B}) = p(\text{A})\left(1 - p(\text{B})\right) = p(\text{A}) \times p(\overline{\text{B}})$

   « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\text{B}}$ sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.
   Affirmation n° 3 : FAUX

$$p(\text{X} < 5) = \int_0^5 -0,7\text{e}^{-0,7x}\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0,7x}\right]_0^5 = 1 - \text{e}^{-0,7\times 5} \simeq 0,503$$

   « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,503 environ. »
   Affirmation n° 4 : FAUX

$$\text{E(X)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} \simeq 1,42$$

   « Le temps d'attente moyen à ce guichet est d'environ 1 minute et demi. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+ ($p = 0,39$).
   On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
   On interroge $n = 183$ donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+ ($f = 0,34$). On va trouver un intervalle de confiance au seuil de 95%.
   Affirmation n° 5 : VRAIE

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,34 - \frac{1}{\sqrt{183}}\,;\, 0,34 + \frac{1}{\sqrt{183}}\right] \subset [0,26\,;\,0,42] \ni p = 0,39$$

   « On ne peut donc pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2 = 0 \end{array}\right. \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$$

Ainsi M a pour coordonnées $(0\,;1)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \Longrightarrow f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow g'(0) = 1$$

En M, leurs tangentes ont, toutes deux le même cœfficient directeur 1,
elles ont donc même tangente Δ d'équation $y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1$.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$$

b) Pour tout réel x

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = \cancel{x} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\cancel{x}} - x - \cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\mathrm{X}=\frac{x}{2}\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty$$

c) Fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \text{ et } h'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff x < 0$$

d) Tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$$

f) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ qui est la droite Δ.

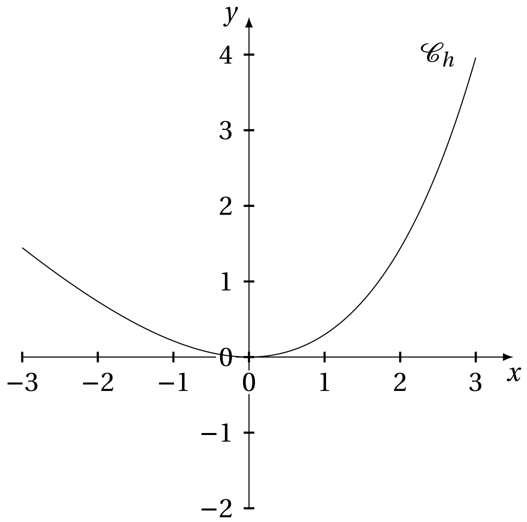
3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

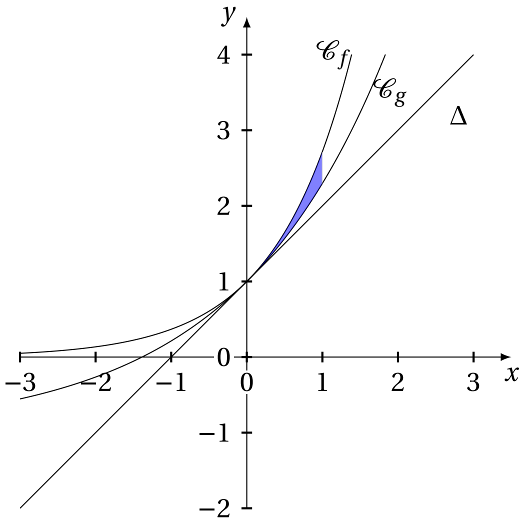
a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 = f(x) - g(x) \geqslant 0$.

b) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
Ainsi, $\left|f(x) - g(x)\right| = \left(f(x) - g(x)\right)$.

4. Aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f(x) + g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - 4\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \mathrm{e} - 1 - 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 4 + 1 = \mathrm{e} - 4\sqrt{\mathrm{e}} + 4 \simeq 0,123\end{aligned}$$





Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Une personne née le 1^er^ août, le programme de calcul (A) donne le nombre 308 :
   - Numéro du jour de naissance multiplié par 12 : $j = 1 \times 12 = 12$;
   - Numéro du mois de naissance multiplié par 37 : $m = 8 \times 37 = 296$;
   - $m + j = 308$.
2. a) Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

$$z = 12j + 37m, \text{ or } 12j \equiv 0\ [12], \text{ donc } z = 12j + 37m \equiv 37m\ [12]$$

   b) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A) :

$$\left\{\begin{array}{l} z = 474 = 39 \times 12 + 6 \\ z \equiv 37m\ [12] \end{array}\right. \Longrightarrow z = (3 \times 12 + 1)m \equiv 6\ [12] \Longrightarrow m \equiv 6\ [12], \text{ le mois est donc juin}$$

$$z = 474 = 12j + 37 \times 6 \Longrightarrow 12j = 474 - 37 \times 6 = 252 = 21 \times 12 \Longrightarrow j = 21$$

Le spectateur est donc né un 21 juin.

Partie B

Le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

1. Première méthode :
   Algorithme modifié (`AlgoBox`) pour qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

```
VARIABLES
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  z EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR m ALLANT_DE 1 A 12
    DEBUT_POUR
    POUR j ALLANT_DE 1 A 31
      DEBUT_POUR
      z PREND_LA_VALEUR 12*j+31*m
      SI (z==503) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER j
        AFFICHER "\ "
        AFFICHER m
        AFFICHER "; "
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME

***Algorithme lancé***
29\ 5;
***Algorithme terminé***
```

   Le spectateur est donc né un 29 mai.

2. Deuxième méthode :
   a) $12a \equiv 0\ [12]$ pour tout a entier, donc

$$z = 12j + 31m \equiv 31m = (2 \times 12 + 7)m = 12 \times 2m + 7m \equiv 7m\ [12]$$

   $7m$ et z ont donc le même reste dans la division euclidienne par 12.

b) Pour m variant de 1 à 12, reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
reste	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

On remarque qu'à chacun des 12 restes possibles correspond un seul mois.

c) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B) :

$$\begin{cases} z = 503 = 41 \times 12 + 11 \\ z \equiv 7m\ [12] \end{cases} \Longrightarrow 7m \equiv 11\ [12] \Longrightarrow m = 5, \text{ le mois est donc mai}$$

$$z = 503 = 12j + 31 \times 5 \Longrightarrow 12j = 503 - 31 \times 5 = 29 \times 12 \Longrightarrow j = 29$$

Le spectateur est donc né un 29 mai.

3. Troisième méthode :

a) Le couple $(-2\,;\ 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$:

$$12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503$$

b) Un couple d'entiers relatifs $(x\,;\ y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$:

$$\begin{cases} 12x + 31y = 503 & L_1 \\ 12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503 & L_2 \end{cases} \Longrightarrow 12(x+2)+31(y-17) = 0\ (L_1 - L_2) \Longleftrightarrow 12(x+2) = 31(17-y)\ (E)$$

c) Résolution de l'équation $12x + 31y = 503$:

- Partie directe :

$$12x + 31y = 503 \Longrightarrow \begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ \text{pgcd}(12;31) = 1 \end{cases} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} 31 \text{ divise } x+2$$

Ainsi, il existe un entier relatif k vérifiant $x + 2 = 31k \Longleftrightarrow \boxed{x = -2 + 31k}$.
En remplaçant dans (E), on obtient :

$$\begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ x + 2 = 31k \end{cases} \Longrightarrow 12 \times \cancel{31}k = \cancel{31}(17-y) \Longleftrightarrow 12k = 17 - y \Longleftrightarrow \boxed{y = 17 - 12k}$$

- Réciproque : pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$12(-2+31k) + 31(17-12k) = \underbrace{12 \times (-2) + 31 \times (17)}_{503} + \cancel{12 \times 31k} - \cancel{12 \times 31k} = 503$$

- Pour tout k de $\mathbb{Z}$, le couple $(x; y) = (-2 + 31k; 17 - 12k)$ est solution de $12x + 31y = 503$.

d) Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x\,;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$:

$$1 \leqslant y \leqslant 12 \Longleftrightarrow 1 \leqslant 17 - 12k \leqslant 12 \Longleftrightarrow -16 \leqslant -12k \leqslant -5 \Longleftrightarrow 5 \leqslant 12k \leqslant 16 \Longleftrightarrow \frac{5}{12} \leqslant k \leqslant \frac{16}{12}$$

Ainsi $k = 1$ est l'unique entier compris entre $\frac{5}{12} \simeq 0{,}4166$ et $\frac{16}{12} \simeq 1{,}3333$.
L'unique couple recherché est donc : $(-2 + 31 \times 1; 17 - 12 \times 1) = (29; 5)$
Le spectateur est donc né un 29 mai.