Sujets de baccalauréat

Une compilation
naissante,
30 juin 2010

Pour toutes et tous,
Avec mes remerciements
pour vos apports, particulièrement à :
Cidrolin et Aléa, pour les scans, et
Ev pour avoir mis sous tex certains sujets.

Quant à Holyday, il traite actuellement avec brio et abnégation l'année 1976 !
Pour Xavier, il s'occupe de 1970.
Quant à C.L, le prêt de certaines annales de 1965 à 1992 a dynamisé et diversifié le contenu.

Jean-éric Richard

Table des matières

Retour page 1

Retour page 1

Chapitre 1

1934

Remarque 1.1. Ici je dispose de moins d'indications sur le type d'épreuve et la série...

Sommaire

I. Korça, bac première partie.

Ex. 1. ./1934/korça/exo-1/texte.tex

On donne un triangle ABH rectangle en A, dans lequel : AB = $3a$, AC = $4a$.

1. Étudier comment varie les sommes des carrés des distances d'un point M aux deux côtés de l'angle droit, quand ce point parcourt l'hypoténuse.
2. Représenter graphiquement cette variation.

II. Paris, bac première partie.

Ex. 2. ./1934/paris/exo-1/texte.tex

1. Ordonner, par rapport à x et y, l'expression :

$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$$

2. x et y étant des inconnues, a, b, h, K des constantes non nulles ; on connaît la valeur h de $ax+by$, la valeur K^2 de x^2+y^2, soit :

$$ax+by=h\,; \qquad x^2+y^2=K^2\,;$$

en déduire la valeur de l'expression $bx-ay$, puis celles de x et de y. Discuter. Trouver le minimum de l'expression x^2+y^2, x et y variant de façon que $ax+by$ reste constante, et donner les valeur de x et de y pour lesquelles ce minimum est atteint.

3. Soit le système d'équations en x, y, z :

$$\begin{cases} ax+by+cz=h\,; \\ x^2+y^2+z^2=K^2\,; \end{cases}$$

a, b, c, h, K étant des constantes non nulles. Choisissant arbitrairement une valeur pour z, peut-on toujours trouver des valeurs de x et de y vérifiant ce système ?
Trouver le minimum de $x^2+y^2+z^2$, x, y, z variant de façon que $ax+by+cz$ reste constante, et donner les valeurs de x, y, z pour lesquelles ce minimum est atteint.

III. Pondichery, bac première partie.

❋ Ex. 3. ./1934/pondichery/exo-1/texte.tex

Les racines d'une équation du second degré vérifient les relations :

$$x' + x'' + 2xx' = 0$$
$$m(x' + x'') - x'x'' = 3m + 4$$

1. Former cette équation.
2. Étudier suivant les valeurs de m, le signe de ses racines.
3. Déterminer comment il faut choisir m pour que l'équation ait une seule racine, comprise entre -1 et 4.

Retour page 1

Chapitre 2

1962

Sommaire

I. Lille, Mathématiques élémentaires.

Ex. 4. ./1962/lillemelem/exo-1/texte.tex

x étant la mesure d'un arc en radians, calculer la dérivée de la fonction :

$$y = 2\sin^2 x(1-\cos x)$$

et étudier le signe de cette dérivée lorsque x varie entre $-\pi$ et $+\pi$;

Problème 1 ./1962/lillemelem/pb/texte

On donne un système de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$; on donne en outre la droite (D) parallèle à $x'Ox$ et rencontrant Oy en B, tel que $\overline{OB} = 2R$ (R est une longueur positive donnée).
On appelle (M) un point tangent à la fois à $x'Ox$ et à (D) et dont le centre M n'est pas sur $y'Oy$; on appelle (P) le cercle inverse (M) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4R^2$: on dit que le cercle (P) est le cercle associé au cercle (M). On notera P le centre de (P).

1° Montrer que lorsque (M) varie, son cercle associé (P) reste tangent à la fois à $x'Ox$ et à un cercle fixe (Γ) que l'on précisera. En déduire :

a) Une construction simple du cercle (P) associé à un cercle (M) donné ;

b) Les cercles (M) qui coïncident avec leur cercle associé ;

c) Le lieu du centre P du cercle (P) lorsque (M) varie.

2° Quel est le lieu des points communs, lorsqu'ils existent, à une cercle (M) et à son cercle associé ? Construire les cercles (M) qui sont tangents à leu associé ; construire leurs cercles associés.

3° Quel est le lieu du pied H de la podaire de O par rapport au cercle (P) lorsque (M) varie ? En déduire que cette podaire passe par un point fixe que l'on précisera.

4° On désigne par (O) le cercle de centre O et de rayon $2R$. Montrer qu'il existe un point K ayant même puissance par rapport au cercle (O), au cercle (Γ), au cercle (M) et à son cercle associé (P). Montrer que, lorsque (M) varie, la perpendiculaire en K à l'axe radical des cercles (M) et (P) passe par un point fixe F. Á quelle courbe cet axe radical reste-t-il tangent ?

Chapitre 3

1963.

Sommaire

I. France, Sciences expérimentales.

✻ Ex. 5. ./1963/francescexp/exo-1/texte.tex

Le nombre a étant donné, existe-t-il, dans chacun des trois cas suivants :

$$a = 37, \qquad a = 65, \qquad a = 130,$$

un nombre entier x tel que $a + x^2$ soit le carré d'un nombre entier.
On donnera les valeurs possibles de x.

✩**Problème 2** ./1963/francescexp/pb/texte

On considère la fonction

$$y = f(x) = x - \tan^2 x,$$

où x désigne la mesure d'un arc en radians et l'on se propose d'étudier sa variation quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

1° Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$. Exprimer cette dérivée en fonction de $\tan x = t$ et vérifier qu'elle est égale à

$$2(1-t)(t^2+t+2).$$

2° Étudier la signe de cette dérivée dans l'intervalle considéré.

3° Étudier la variation de la fonction y quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et la représenter graphiquement, dans un système d'axes rectangulaires, par une courbe (C).
On déterminera à 0,1 près les ordonnées des points correspondant à

$$x = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{\pi}{4}, \qquad x = \frac{\pi}{3}.$$

On choisira les unités sur les axes de la manière suivante :

– un segment de 6 cm représentera π radians sur Ox ;
– un segment de 1 cm sera l'unité sur Oy.

4° Vérifier que la fonction

$$F(x) = -\tan x + 2x^2 + x$$

est une primitive de la fonction $f(x)$.
On considère le point A de (C) ayant pour abscisse $\frac{\pi}{3}$ et sa projection orthogonale, A', sur Ox.
Calculer, à 0,01 près, en centimètres carrés, l'aire comprise entre l'arc OA de (C), le segment AA' et l'axe Ox.

II. France, Mathématiques élémentaires.

Ex. 6. ./1963/francemathelem/exo-1/texte.tex

Trouver les nombres complexes $z = x + iy$ tels que

$$z^2 = 7 - 24i.$$

Problème 3 ./1963/francemathelem/pb/texte

On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle (O) de centre O et de rayon R.

1° On appelle $(\mathscr{C})$ tout cercle ayant comme diamètre une corde PQ de cercle (O) ; on appelle C le centre d'un tel cercle , et ρ son rayon.

Montrer que $(\mathscr{C})$ est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre C, par rapport au cercle (O) et $-\rho^2$.

2° On suppose dans la suite du problème que le centre C appartient à $x'Ox$ et l'on pose $\overline{OC} = \lambda$.

a) Former l'équation qui détermine λ quand $(\mathscr{C})$ passe par un point donné, S, de coordonnées x, y. Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse (E), qu'on obtiendra par son équation et dont on précisera les sommets et les foyers.

Dans quelle région, délimitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions ?

b) On se place dans le cas où le problème admet deux solutions, C_1 et (C_2), d'abscisses λ_1 et λ_2, et l'on demande que les cercles (C_1) et (C_2) soient othogonaux.

Former une équation des points S correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.

3° Parmi les cercles (C) dont le centre C est sur $x'Ox$, on se borne désormais à ceux, en outre, qui coupent $y'Oy$.

a) Préciser l'ensemble des centres C de ses cercles.

b) Soient I et J les points où (C) coupe $y'Oy$, U et V les symétriques de I et J par rapport au diamètre PQ, U' et V', les points où IU et JV coupent respectivement le cercle (O) ; montrer que $\overline{IU}$ et $\overline{IU'}$ gardent un rapport constant ; reconnaître l'ensemble des points U et V.

c) Montrer que les tangentes en U à (C) et en U' à (O) se coupent en un point de $y'Oy$; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles (C) de cette partie 3 ?

III. France, Mathématiques et Technique.

Ex. 7. ./1963/francemathtech/exo-1/texte.tex

a) Simplifier l'expression $\sqrt{(x-1)^2}$.

b) Étudier la variation de la fonction

$$y = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Tracer la courbe représentative.

Ex. 8. ./1963/francemathtech/exo-2/texte.tex

On donne un cercle (C), de centre O, et une corde fixe, AB, de ce cercle.
On désigne par I le milieu de AB (on suppose que I et O sont distincts).
Soit M un point variable de (C) ; la tangente en M au cercle (C) coupe la droite AB en T.

1° Montrer que la polaire, t, de T par rapport au cercle (C), passe par un point fixe, J, et que le cercle (ω) de diamètre JT est orthogonal à (C).

Le point M décrivant le cercle (C), montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau, dont on précisera les points de base.

2° Quel est le lieu du point T', transformé de T par l'inversion de pôle J, de puissance JA^2 ? Transformer par cette inversion le cercle (ω) et la droite MT.

Retour page 1

3° Soit K le centre du cercle inverse de la droite MT. Quel est le lieu de K ?
Soit α le milieu de JO, $y'\alpha y$ un axe porté par JO et de même sens que $\overrightarrow{JO}$, $x'\alpha x$ un axe tel que le repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$ soit direct et orthonormé.
Écrire l'équation du lieu de K par rapport à ce repère.
On désignera par R le rayon de (C) et par kR ($k > 1$) la longueur OJ.

4° Quelle est la polaire t', du point T' par rapport au cercle (C) ? Déterminer l'enveloppe de t'.

5° Dans cette question, on suppose que $k = 2$.
Déterminer les lieux :

a) de l'orthocentre, H, du triangle MAB ;

b) du pied, H', de la polaire, h, de H par rapport au cercle (C).
Quelle est l'enveloppe (E) des droites h ? Écrire l'équation de (E) par rapport au repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$.

N.B. – Par « lieu géométrique » ou « lieu », il faut entendre « ensemble de points ».

Retour page 1

Chapitre 4

1964.

Sommaire

I. Tahiti, Mathématiques élémentaires.

✻ Ex. 9. ./1964/tahitimelem/exo-1/texte.tex

Racines carrées du nombre $45-28\mathrm{i}$.

☆Problème 4 ./1964/tahitimelem/pb/texte

(γ) et (δ) sont deux cercles fixes, orthogonaux , de centre C et D ; ils se coupent en A et B.
Un diamètre mobile de (δ) coupe (γ) en P et Q.
BP et BQ recoupent (δ) en R et S.

1° Montrer que les triangles PAR, QAS et CAD sont directement semblables.

2° Montrer que la droite RS est perpendiculaire à PQ et que RS passe par un point fixe, E, dont on donnera une construction simple.

3° I et J sont les pôles de PQ par rapport à (γ) et RS par rapport à (δ). Trouver l'ensemble des points I et J et montrer que IJ garde une direction fixe.

4° (i) et (j) sont respectivement les cercles de centre I passant par P et Q et de centre J passant par R et S.
Montrer que (i) et (j) appartiennent à deux faisceaux ; trouver l'ensemble des points communs, M et M' à (i) et (j) (quand ils existent) et l'ensemble de leurs centres d'homothéties.

Chapitre 5

1965.

Sommaire

I. Aix Marseille, Maths élém. et Maths et Tech.

Ex. 10. ./1965/aixmarseillemelem/exo-1/texte.tex

On donne le triangle ABC, dont le centre de gravité est G ; soit M un point de ce plan.

1. Exprimer
$$f(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
au moyen des longueurs MG, BC, CA, AB.
2. Quel est l'ensemble E des points M tels que $f(M) = 0$? Quels points de E appartiennent au cercle de diamètre BC ?

Problème 5 ./1965/aixmarseillemelem/pb/texte

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$; p et q étant deux nombres complexes, on désigne par M le point de coordonnées (p, q) et on considère l'équation en z
$$z^2 - 2pz + q = 0, \tag{1}$$
dont les racines peuvent être réelles ou complexes.
Ainsi, à tout point M est associée l'équation (1), et réciproquement.

1. Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles A, B, C des points M tels que (1) possède :
   a) des racines complexes ;
   b) des racines réelles et distinctes ;
   c) une racine double.

   Calculer les racines dans chacun des trois cas.
2. Former l'équation de la tangente à C en son point d'abscisse c ; montrer que si, $M(p, q)$ appartient à B, l'équation (1) donne les abscisses des points de C àù la tangente passe en M.
   Dans les deux question suivantes, k désigne un nombre réel positif donné, pour répondre à ses questions, on pourra examiner successivement le cas où M appartient à A où à B.
3. Déterminer l'ensemble E_k des points M tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à M soit inférieur à $2k$.
   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, E_k et hachurer ce dernier.
4. Déterminer l'ensemble F_k des points M tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à M soient, *tous deux*, inférieur à k.
   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, F_k et hachurer ce dernier.
5. On donne un nombre k positif ; quel est le plus grand nombre, k', tel que l'ensemble $F_{k'}$ soit inclus dans l'ensemble E_k ?
   Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?
6. On suppose que M appartient à B et l'on désigne par Γ_M le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont racines sont les abscisses de l'équation (1) associée à M.
   Écrire une équation du cercle Γ_M.
   Montrer qu'un sous-ensemble de cercles Γ_M est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points M correspondants appartiennent à une même droite, Δ non parallèle à Oy, qu'on déterminera par une équation de la forme $y = mx+h$.
   Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à Δ et à C ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau ?

Retour page 1

II. Aix Marseille, Maths élém. et Maths et Technique

✻ Ex. 11. ./1965/aixmarseillemelemrem/exo-1/texte.tex

Par rapport à un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) où l'unité est de longueur est 1 cm, on donne les points $A(+3\ ;\ +3\ ;\ +3)$, $I(+3\ ;\ 0\ ;\ +6)$, $J(+6\ ;\ +3\ ;\ +9)$.
Représenter ces point sur une épure, les plans de projections étant le plan xOy horizontal et le plan yOz frontal.
Représenter le carré ABCD dont le sommet est A et dont la diagonale BD est portée par le droite IJ.
N. B. - On expliquera la méthode géométrique suivie et son adaptation à l'épure.

☆Problème 6 ./1965/aixmarseillemelemrem/pb/texte

On considère la suite de nombres u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ... On donne les deux premiers u_0 et u_1, réels ; les suivants sont définis par la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad n \geqslant 2.$$

1° Construire cette suite de nombres ; établir qu'elle est périodique ; de combien de nombres se compose cette période ?

2° Démontrer que u_n peut se mettre sous la forme

$$u_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta,$$

où θ ne dépend pas de u_0, u_1 et n et où λ et μ dépendent de u_0 et u_1 et non de n. Calculer θ $(0 < \theta < \pi)$, λ et μ.

3° $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{OP_n} = \vec{i}\,\lambda \cos n\theta + \vec{j}\,\mu \sin n\theta,$$

λ, μ et θ ayant les valeurs ci-dessus. Montrer que les points P_n sont sur une même conique, L, dont on précisera les éléments.

Montrer que les droites P_kP_{k+1} sont tangentes à un conique, L', homothétique et concentrique à L.

4° Montrer que toute expression

$$v_n = A \cos n\phi + B \sin n\phi,$$

où A, B, ϕ $(0 \leqslant \phi \leqslant \pi)$ sont trois réels *quelconques*, indépendants de n, peut-être considérée comme le terme $n+1$ d'une suite v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ... satisfaisant la relation de récurrence

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

a et b étant deux constantes, que l'on calculera e, fonction de φ.

Pour quelles valeurs de φ cette suite est-elle périodique, sa période contenant p termes ?

III. Aix Marseille, Sciences expérimentales

✻ Ex. 12. ./1965/aixmarseillescexp/exo-1/texte.tex

Trouver trois nombres relatifs, a, b, c dont la somme soit 3, tels que, dans l'ordre a, b, c, ils soient en progression arithmétique et que, dans l'ordre, a, b, c, ils soient en progression géométrique.

✻ Ex. 13. ./1965/aixmarseillescexp/exo-2/texte.tex

La plan étant rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy, on considère la fonction

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log x.$$

(Le symbole log désigne le logarithme népérien.)

1° Étudier les variations de cette fonction, lorsque x varie de façon que $0 < x \leqslant 2$.

Construire le graphe (C) représentant ces variations.

Calculer l'ordonnée des points d'abscisses 2 et $\dfrac{1}{2}$.

Retour page 1

2° Le point mobile M se déplace dans le plan de façon qu'à une date t de l'intervalle $[+1\,;+2]$, ses coordonnées sont données par les équations

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{2}\log t. \end{cases}$$

a) Quelle est sa trajectoire ?

b) Calculer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ à la date t et trouver la mesure de $\overrightarrow{V}$; en déduire le mesuer de l'arc parcouru par M à l'instant t.
Quelle est la longueur de l'arc parcouru entre les deux dates $t = 1$ et $t = 2$?

IV. Aix Marseille remplacement, Sciences expérimentales

✻ Ex. 14. ./1965/aixmarseillescexprem/exo-1/texte.tex

Tous les nombres envisagés dans cet exercice sont entiers positifs.

1° Trouver tous les couples $(a,\ b)$ vérifiant les conditions suivantes : les nombres a et b sont premiers entre eux et leur produit est 30. (Les couples $(a,\ b)$ et $(b,\ a)$ ne sont pas considérés comme distincts.)

2° Trouver tous les couples $(x,\ y)$ vérifiant les conditions suivantes : les nombres x et y admettent 121 comme plus grand commun diviseur et leur produit est 439 230.

✻ Ex. 15. ./1965/aixmarseillescexprem/exo-2/texte.tex

Les axes Ox et Oy sont rectangulaires ; leur vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont même longueur ; l'unité de surface est celle du carré construit sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

1° Dessiner sur une même figure :

a) la courbe (H) représentant la fonction

$$y_1 = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}\ ;$$

b) la droite (Δ) représentant la fonction $y_2 = \dfrac{x}{4}$;

c) la courbe (H') représentant la fonction

$$y_3 = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}.$$

On justifiera le tracé des courbes (H) et (H') par une étude succincte des variations des fonctions y_1 et y_3.

2° On considère les droites (D_1) et (D_2) parallèles à l'axe Oy et dont les abscisses sont respectivement $x_1 = 2\mathrm{e}$ et $x_2 = \mathrm{e}^2$ (e désigne la base des logarithmes népériens).
La droite (D_1) rencontre (H) en A et (H') en A' ; la droite (D_2) rencontre (H) en B et (H') en B'.
Calculer l'aire de la portion de plan bornée par les segments AA', BB' et les arcs AB et A'B' de (H) et de (H').

✻ Ex. 16. ./1965/aixmarseillescexprem/exo-3/texte.tex

On considère le repère cartésien orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
La variable t représente le temps, l'unité d'arc est le radian. On considère trois mobiles, P, P' et M déterminés par

$$\overrightarrow{OP} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j},$$
$$\overrightarrow{OP'} = \sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j},$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}.$$

1° Démontrer que les mouvements de P et P' sont circulaires ; construire au même instant t le vecteur vitesse et le vecteur accélération de chacun d'eux.

2° Démontrer que le mouvement de M est vibratoire simple ; préciser la droite qui porte sa trajectoire. Préciser l'amplitude et la période de ce mouvement.

V. Aix Marseille, Série Technique & Économie

✻ Ex. 17. ./1965/aixmarseilletecheco/exo-1/texte.tex

Décomposer le nombre 60 en produit de facteurs premiers.
Écrire tous les couples de nombres dont le produit vaut 60. (On considère pas comme distincts deux couples qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs).
Trouver les couples de nombres entiers positifs x et y vérifiant la relation

$$x^2 - y^2 = 60.$$

✻ Ex. 18. ./1965/aixmarseilletecheco/exo-2/texte.tex

A, B, C désignant les angles d'un triangle, comparer sin C et sin (A+B).
On suppose que A, B et C vérifient la relation

$$\sin \mathrm{C} - 2\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{A} = 0.$$

Montrer que le triangle ABC est isocèle.

✰Problème 7 ./1965/aixmarseilletecheco/pb/texte

1° Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 7x + 10}.$$

Tracer le courbe représentative (C) rapportée à un système d'axes perpendiculaires $x'Ox$, $y'Oy$; l'unité, sur chaque axe, est représentée par 1 centimètre.

2° Par le point H de $y'Oy$, d'ordonnée h, on mène la droite (D) parallèle à $x'Ox$.
Former l'équation donnant les abscisses des points communs à la courbe (C) et à la droite (D). Étudier, suivant les valeurs de h, le nombre de points communs à (C) et (D).
Peut-on choisir h pour que la droite (D) coupe (C) en deux points M' et M'', tels que

$$\overline{HM'} + \overline{HM''} = 8 \text{ ?}$$

Peut-on choisir h pour que la droite (D) coupe (C) en deux points N' et N'', tels que

$$\frac{1}{\overline{HN'}} + \frac{1}{\overline{HN''}} = \frac{8}{11} \text{ ?}$$

3° Déterminer b de façon que la droite (Δ) représentant la variation de la fonction

$$y = m(x+b) \quad (m \neq 0)$$

coupe la courbe (C) au point A d'abscisse 3, quelle que soit la valeur de m.
Former l'équation donnant les abscisses des points communs à (Δ) et (C), autres que A.
Étudier, suivant les valeurs de m, le nombre de ces points communs.
Pour quelle valeur de m la droite (Δ) coupe-t-elle (C) en deux points symétriques par rapport à A ? Quelles sont les coordonnées de ces points ?

VI. Aix Marseille remplacement, Série Technique & Économie

✻ Ex. 19. ./1965/aixmarseilletechecorem/exo-1/texte.tex

Construire l'arc AB de la courbe représentant la variation de la fonction $y = 1 + \cos x$ lorsque x croît de 0 à π.
Échelle sur les deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$: l'unité sera représentée par 2 centimètres.
Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la portion de plan délimitée par les axes de coordonnées et par l'arc AB.

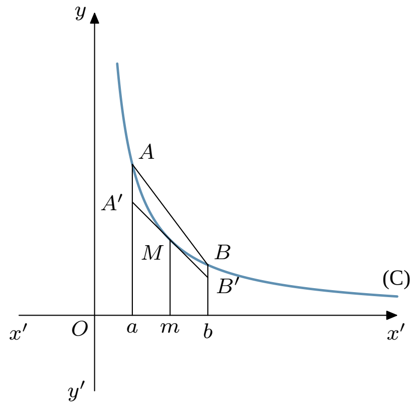
✻ Ex. 20. ./1965/aixmarseilletechecorem/exo-2/texte.tex

Un urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire deux de ces boules. Calculer la probabilité :

a) pour qu'elles soient noires toutes les deux ;
b) pour qu'elles soient de la même couleur ;
c) pour qu'elles soient de couleurs différentes.

✰Problème 8 ./1965/aixmarseilletechecorem/pb/texte

Conformément au programme, le symbole $\log x$ désigne la logarithme népérien de x.



1° Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$.
On considère la courbe (C) représentant la variation de la fonction

$$y = \frac{1}{x}$$

lorsque x croît de 0 à $+\infty$.
Les points A, B et M de cette courbe ont pour abscisse respectives :

– A : $x_1 = \overline{Oa} = \alpha$,
– B : $x_2 = \overline{Ob} = \alpha + 1$,
– C : $x_3 = \overline{Om} = \alpha + \frac{1}{2}$.

La tangente à (C) passant par M coupe les droites aA et bB en A' et B'.

a) Calculer l'aire, S, du trapèze rectangle $abBA$.
b) Calculer l'aire, s, du trapèze rectangle $abB'A'$.
c) Calculer l'aire, $S - s$, du trapèze rectangle $A'B'BA$.
d) Calculer l'aire, Σ, du trapèze curviligne limité par les segments Aa, ab, bB et l'arc AB de la courbe (C).
e) En déduire une expression approchée par défaut et une expression approchée par excès de

$$\log\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right).$$

f) *Application numérique :* Calculer une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès de $\log 1{,}01$.

2° a) Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{2x+1}{2x^2+2x}.$$

Construire la courbe (Γ) représentant la variation de cette fonction. (Sur les deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$, l'unité sera représentée par 1 centimètre).
Indiquer ses asymptotes. Montrer que le point où (Γ) coupe l'axe $x'x$ est centre de symétrie pour cette courbe.

b) n désignant un entier naturel, démontrer que la fraction $\dfrac{2n+1}{2n^2+2n}$ est irréductible.

Retour page 1

3° a) Étudier la variation de la fonction

$$y = 2x(x+1)(2x+1)$$

.

b) En déduire la variation de la fonction

$$z = \frac{1}{2x(x+1)(2x+1)}.$$

c) n étant un entier naturel, démontrer que l'expression $2n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 12.

N.B. - Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes ; les questions 1a, 1d et 1d sont indépendantes ; les questions 2a et 2b sont indépendantes ;les questions 3a et 3c sont indépendantes.

VII. Antilles, Mathématiques élémentaires

Ex. 21. ./1965/antillesmelem/exo-1/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y = \cos x + \sin x$$

et tracer le courbe représentative, dans un repère orthonormé Ox, Oy.
Application : Discuter par rapport au paramètre m le nombre de racines de l'équation $\cos x + \sin x = m$ comprises entre $-\pi$ et $+\pi$.

Problème 9 ./1965/antillesmelem/pb/texte

On considère trois axes de coordonnées Ox, Oy et Oz, tel que le trièdre $Oxyz$ soit trirectangle direct.
On considère les deux rotations de l'espace d'axes Ox et Oy et d'angles respectifs 2α et 2β, avec $0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$ et $0 \leqslant 2\beta \leqslant \pi$. On se propose d'étudier la transformation produit de ces deux rotations.

1° a) En considérant chaque rotation comme le produit de deux retournements, montrer que l'on peut faire en sorte que l'un des retournements soit commun.

b) En conclure que le produit des deux rotations est une rotation autour d'un axe Δ passant par O. Construire cet axe.

c) Montrer que, dans le cas général, un système de paramètres directeurs de cet axe Δ est

$$\begin{cases} a = \cot\beta, \\ b = \cot\alpha, \\ c = -1. \end{cases} \tag{1}$$

(Pour cela, on pourra utiliser le produit scalaire.)
Quels sont les cas particuliers auxquels les formules (1) ne s'appliquent pas ?

d) Montrer que l'angle 2θ de la rotation produit est tel que

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta.$$

A quelle condition le produit est-il un retournement ?

e) Lieu de Δ si β varie, α restant fixe.

2° a) L'axe Δ coupe le plan (P) d'équation $z = -1$ en un point M, dont on donnera les coordonnées en fonction de α et β.
Si β varie, α restant fixe, quel est le lieu de M ?
Retrouver ainsi le résultat du 1e.

b) On suppose que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Quel est alors le lieu de M ?

c) On suppose que $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Montrer que le lieu de M est alors, dans le plan (P), une courbe (C) qui se projette sur le plan xOy suivant une portion de la courbe d'équation $y^2 - 2xy - 1 = 0$. Construire cette courbe.

d) On considère la surface engendrée par Δ quand M décrit la courbe (C). Le plan (Q) d'équation $y = 1$ coupe cette surface suivant une courbe (C'). Construire la projection de (C') sur la plan xOz.

Retour page 1

VIII. Besançon, Maths élémentaires & Mathématiques et Technique

✻ Ex. 22. ./1965/besançonmelem/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe d'affixe $Z = 8\sqrt{2}(1-\text{i})$.
Déterminer le module et l'argument de Z.
Déterminer les racines quatrièmes de Z.

✻ Ex. 23. ./1965/besançonmelem/exo-2/texte.tex

En utilisant la théorie des congruences, déterminer la forme générale des entiers naturels n tels que l'entier $n^3 - n + 1$ soit divisible par 7.

☆Problème 10 ./1965/besançonmelem/pb/texte

Deux cercles (C) et (C'), de centres O et O' sont tangents extérieurement en I. Soit (Δ) leur tangente commune intérieure. Soit P et P' les points diamétralement opposés à I sur (C) et (C').
D'un point M variable de (Δ) on mène à (C) et à (C') les secondes tangentes, dont les points de contact sont T et T'.
Soit Q l'intersection des droites PT et P'T'.

1° Montrer que les quatre points Q, T', T et I appartiennent à un même cercle (γ) centré en M.
Ensemble des points Q.

2° Soit U et U' les points communs aux couples de droites (PT, IT') et (P'T', IT).
Montrer que U, T, U' et T' appartiennent à un même cercle (γ').
Montrer que UU' est perpendiculaire à (Δ).

3° Montrer que (γ) et (γ') sont orthogonaux.
En déduire que (γ') est tangent à (C) et (C') respectivement en T et T'.

4° Montrer que TT' passe par un point fixe.

IX. Besançon, Sciences expérimentales

✻ Ex. 24. ./1965/besançonscexp/exo-1/texte.tex

Soit un nombre N écrit $\overline{abc}$ en système à base 13, a, b, c étant des chiffres quelconques de ce système.
les nombres 10, 11 et 12 du système décimal sont représentés par les chiffres α, β et γ dans le système à base 13, les autres chiffres du système à base dix et à base treize coïncidant.

1° A quelle condition $\overline{abc}$ est-il divisible par treize ; par le carré de treize ?

2° Montrer que $\overline{abc}$ et $a+b+c$ ont même reste de division par 12. En déduire une condition nécessaire et suffisante de division de $a+b+c$ par douze.

3° Trouver une condition de divisibilité de $\overline{abc}$ par quatorze.

4° *Application :* Écrire 1 001 du système à base dix, en système à base 13.
Que remarque-t-on ?
Quels sont ses restes de division par douze et quatorze.

✻ Ex. 25. ./1965/besançonscexp/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $y_1 = x\log x$.

1° Préciser l'intervalle de définition. Étudier le sens de variation et tracer la courbe représentative (Γ) de cette fonction dans un système d'axes orthonormé d'origine O.

2° Soit la fonction $y_2 = ax(x^2-1)$. Déterminer a pour que sa courbe représentative, (C), et la courbe (Γ) aient même tangente au point $A(+1\ ;\ 0)$. Construire la courbe (C) correspondante.

3° Vérifier que $\dfrac{x^2}{2}\left(\log x - \dfrac{1}{2}\right)$ est une primitive de la fonction $y_1 = x\log x$.
Déterminer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe (Γ) et le segment OA, puis l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe (C) et le segment OA.
Que représente la différence des ces aires ?

Retour page 1

N.B. - On admettra que $y_1 = x \log x$ a pour limite zéro quand x tend vers 0.

X. Besançon, Série Technique & Économie.

✻ Ex. 26. ./1965/besançontecheco/exo-1/texte.tex

Trouver l'ensemble des nombres s'écrivant $\overline{cdu}$ dans le système décimal (c représentant le chiffre des centaines, d celui des dizaines, u celui des unités) et possédant les propriétés suivantes :

– ils diminuent de 99 si l'on intervertit les deux chiffres extrêmes ;

– ils diminuent de 45 si l'on intervertit les deux derniers chiffres.

✻ Ex. 27. ./1965/besançontecheco/exo-2/texte.tex

Vingt chevaux prennent le départ d'une course. Quelle est la probabilité de prévoir les trois chevaux classés premiers :

1° dans l'ordre de leurs arrivées ;

2° sans tenir compte de cet ordre.

☆**Problème 11** ./1965/besançontecheco/pb/texte

Soit la fonction

$$y = \frac{10x}{(x^2-1)^2}.$$

A) Étude de la fonction.

1° Pour quelles valeurs de x est-elle définie ?

2° Montrer que la courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.

3° Calculer la dérivée et en déduire la variation de la fonction. Quelle est la valeur de la dérivée pour $x = 0$?

4° Étudier les limites de y lorsque x tend vers $\pm\infty$ et lorsque x tend vers ± 1.

5° Tracer la courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé.

B) 1° Montrer que y peut s'écrire $\frac{av'}{v^2}$, v' représentant la dérivée par rapport à x de la fonction v de la variable x et a une constante.

2° En déduire une primitive de la fonction y.

3° Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des x et les droites d'équations $x = 2$, $x = 3$.

C) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = \frac{10}{9}x$.

XI. Besançon remplacement.

Les sujets sont ceux de l'académie de Lyon.

XII. Bordeaux, Sciences expérimentales

✻ Ex. 28. ./1965/bordeauxscexp/exo-1/texte.tex

Transformer en produits les sommes $A = \sin x + \sin 2x$ et $B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.
Résoudre ensuite l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x \cos\frac{3x}{2}.$$

✻ Ex. 29. ./1965/bordeauxscexp/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y = 4x^3 - 3x + 1.$$

Construire la courbe représentative, C, par rapport à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
Montrer que C admet un centre de symétrie.
A et B désignant les points de C d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, calculer en centimètres carrés l'aire du domaine délimité par Ox, Oy et l'arc AB de C.

☆**Problème 12** ./1965/bordeauxscexp/pb/texte

Un observateur se place en A dans le plan vertical passant par les sommets M et M' de deux montagnes, qu'il voit devant lui. M est le sommet le plus proche, M' le plus éloigné de A.
La direction AM est inclinée de 9°30′, celle de AM' de 18°10′ sur l'horizon.
L'observateur se déplace ensuite, sans changer d'altitude et en restant dans le plan vertical de M et M', jusqu'à ce qu'il atteigne un point A' tel que A', M et M' soient alignés.
Il constate qu'il a parcouru une distance AA' de 6 365 m et que la droite $A'MM'$ est inclinée de 37°sur l'horizon.
Calculer les altitudes de M et M' au-dessus du plan horizontal de A et A'.

XIII. Bordeaux, Maths élementaires & Maths et Technique

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille.

XIV. Bordeaux remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille.

XV. Caen, Sciences expérimentales

✻ Ex. 30. ./1965/caenscexp/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $y = x \sin x$.

a) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?

b) Calculer sa dérivée.

c) Étudier sa variation pour x variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et tracer avec soin l'arc de courbe correspondant, (Γ), dans un repère orthonormé.

d) Calculer la dérivée de la fonction

$$y = \sin x - x \cos x.$$

En déduire l'aire de la surface délimitée par (Γ) et la première bissectrice.

e) En supposant x quelconque, montrer que la courbe d'équation $y = x \sin x$ est tangente en une infinité de points à la première bissectrice et en une infinité de points à la seconde bissectrice. Déterminer ces points.

✻ Ex. 31. ./1965/caenscexp/exo-2/texte.tex

Un mobile se déplace sur un axe, son abscisse x étant donnée en fonction du temps t par la relation

$$x = 5 \cos 2t - 3 \sin 2t. \qquad \text{(E)}$$

Déterminer le vecteur vitesse et la vecteur accélération de ce mobile.
Construire la représentation graphique de la fonction définie par la relation (E) pour $|t| \leqslant 4$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de x ?

XVI. Caen, Maths élémentaires & Mathématiques et Technique

✻ Ex. 32. ./1965/caenmelem/exo-1/texte.tex

On donne deux points, A et A', et une droite (D).
Quel est l'ensemble des axes orientés parallèles à (D) des déplacements hélicoïdaux dans lesquels A' est le transformé de A ?
Construire l'axe d'un tel déplacement hélicoïdal, connaissant l'angle orienté α de ce déplacement.

✻ Ex. 33. ./1965/caenmelem/exo-2/texte.tex

1° Calculer la dérivée de la fonction $y = (n-x)\mathrm{e}^x$, où n est une constante.

2° Étudier, quand $x \geqslant 0$, les variations de la fonction $y = (2-x)\mathrm{e}^x$ et en construire la courbe représentative dans un repère orthonormé.
Calculer l'aire du domaine compris entre cette courbe et les demi-axes Ox et Oy.

☆**Problème 13** ./1965/caenmelem/pb/texte

On considère, sur un axe orienté $x'Ox$, les points A et B d'abscisses respectives $(+a)$ et $(-a)$.
On supposera que a est positif. On se propose d'étudier la transformation ponctuelle plane T_θ, où θ est un angle défini à $k\pi$ près, qui, à un point m du plan, fait correspondre le point M de ce plan, intersection des droites Au et Bv qui font respectivement avec les droites Am et Bm les angles orientés

$$(Am,\ Au) = \theta \qquad \text{et} \qquad (Bm,\ Bv) = \theta.$$

1° a) Quel est l'ensemble des points m du plan qui n'ont pas de transformé M à distance finie par T_θ ?
Quelle est la transformation réciproque de la transformation T_θ ?
Pour quelles valeurs de θ cette transformation est-elle involutive ?
Montrer que l'ensemble des ces transformations forment un groupe.

b) Quelle est la figure transformée par T_θ d'un cercle passant par A et B, d'une droite passant par A, d'une droite passant par B ?

c) Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, quelle est la figure transformée par $\mathrm{T}_{\frac{\pi}{2}}$ d'une perpendiculaire à $x'Ox$?

2° On supposera, dans la suite du problème, que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
On désignera par x et y les coordonnées de m et par X et Y celles de M dans le repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.

a) Calculer X et Y en fonction de x et y. Discuter.

b) On suppose que m décrit une cercle (Γ) passant par A et B.
Écrire l'équation d'un tel cercle et montrer que, si λ est l'ordonnée de son centre, on a les relations $Y - x = X + y = \lambda$.
En déduire une relation liant X et Y quand m décrit (Γ). Conséquence.

c) On suppose que m décrit une perpendiculaire à $x'Ox$, d'abscisse ℓ. Trouver l'équation de la courbe décrite par M. Nature de cette courbe.
Discuter suivant les valeurs de ℓ.

N.B- les deux parties du problème sont entièrement indépendantes.

XVII. Caen, série Technique et économie

✻ Ex. 34. ./1965/caentecheco/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 3 = 0,$$

dans laquelle x est l'inconnue et e^x désigne l'exponentielle de x.

Retour page 1

✻ Ex. 35. ./1965/caentecheco/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 3 = 0,$$

dans laquelle x est l'inconnue et e^x désigne l'exponentielle de x.

☆**Problème 14** ./1965/caentecheco/pb/texte

1° Étudier la variation de la fonction

$$y_1 = \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$$

et tracer la courbe représentative, (C), de cette fonction, en prenant le centimètre pour unité sur chaque axe.

2° Utiliser le graphique précédent pour discuter le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 - (\lambda - 2)x^2 + 4 = 0, \qquad \text{(E)}$$

dans laquelle x est l'inconnue et λ un paramètre.

3° On coupe la courbe (C) par la droite variable (D_m) d'équation $y = x + m$ (m étant un paramètre).
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points communs aux courbes (C) et (D_m). Déterminer m pour que la droite, (D_m) coupe la courbe (C) en deux points M' et M'', tels que la distance $M'M''$ soit égale à $3\sqrt{2}$.

4° Tracer sur le même graphique, la parabole (P) d'équation

$$y_2 = x^2 - 2x + 2.$$

On désigne par I le point d'abscisse négative commun aux courbes (C) et (P), par A le point de la courbe (C) d'abscisse -2 et par S le sommet de la parabole (P).
Calculer l'aire limitée par l'axe des abscisses, les arcs AI et IS des courbes (C) et (P) et les ordonnées des points A et S.

XVIII. Caen remplacement

Mêmes sujets que ceux de Paris.

XIX. Clermont, Sciences expérimentales

✻ Ex. 36. ./1965/clermontscexp/exo-1/texte.tex

1° Résoudre l'équation

$$2\cos^2 x + \sin 2x = 1.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

2° Résoudre l'inéquation

$$2\cos^2 x + \sin 2x \leqslant 1.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

✻ Ex. 37. ./1965/clermontscexp/exo-2/texte.tex

1° Étudier les variations de la fonction $y = f(x)$ définie par :

$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$$

et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une racine x_0.

2° Construire la courbe, (C), représentative de la fonction $f(x)$, pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$, les axes étant rectangulaires et l'unité égale à 10 cm sur l'axe $x'x$ et à 2 cm sur l'axe $y'y$.
Construire en particulier, les trois points suivants de la courbe (C) :
A, d'abscisse -1, B, d'abscisse $-0{,}5$, D, d'abscisse 0 ; construire la tangente à (C) en chacun des ces points.

Retour page 1

3° On se propose de calculer une valeur approchée de x_0 à moins de 0,025 près ; pour cela, on calculera, à moins de 0,001 près, l'abscisse x_1 du point de l'axe $x'x$ situé sur la tangente à (C) en B et l'abscisse x_2 du point de l'axe $x'x$ situé sur la droite BD et l'on admettra que x_0 est situé entre x_1 et x_2.

4° Calculer une valeur approchée de l'aire S de la surface limitée par (C) et les axes $x'x$ et $y'y$.

XX. Clermont, autres sujets

Identiques à ceux d'Aix Marseille.

XXI. Cambodge et Pékin, série Mathématiques élémentaires

✻ Ex. 38. ./1965/cambodgemelem/exo-1/texte.tex

Trouver les chiffres a et b tels que les nombres de la forme $\overline{1a1bab}$ écrits dans le système à base 10 soient divisibles par 63.

✻ Ex. 39. ./1965/cambodgemelem/exo-2/texte.tex

Montrer que, dans le corps des complexes, les racines de l'équation

$$z^3 = 1$$

forment un groupe pour la multiplication.

☆Problème 15 ./1965/cambodgemelem/pb/texte

Le repère de référence Ox, Oy sera, dans tout le problème orthonormé. On considère la transformation ponctuelle (S) qui, à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées xyp telles que :

$$\begin{cases} x' = 2\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha, \\ y = 2\sin\alpha - x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha, \end{cases}$$

α étant un angle donné tel que $-\pi \leqslant \alpha < \pi$.

1° Déterminer par son équation l'ensemble (D) des points doubles de (S).

2° Quelle est la transformation réciproque de (S) ? (S) est-elle involutive ? Montrer que (S) définit une bijection du plan sur lui-même.

3° Montrer que (S) est une isométrie, c'est à dire qu'elle conserve les longueurs. Quelle est la figure transformée d'un cercle du plan ? Que peut-on dire d'un cercle centré sur (D) ?

4° Quelle est la figure (Δ') transformée d'une droite (Δ) ? Montrer que (Δ) et (Δ') se coupent sur (D) ou sont parallèles à (D).

5° Montrer que MM' est perpendiculaire à (D). Identifier la transformation (S).

6° Dans toute la suite du problème on fait $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

On appellera (Y) la symétrie d'axe Oy et (H) l'homothétie de centre $A(0\ ;\ +2)$ et de rapport 2.

Définir la transformation $(\Sigma) = (H) \circ (\mathrm{S}) \circ (Y)$ (on fait successivement les transformations (Y), puis (S), puis (H)).

7° Trouver géométriquement la transformée par (Σ) du support Ox. Donner son équation.

N' étant le transformé par (Σ) d'un point N de Ox, quel est l'ensemble des projections orthogonales de A sur NN' et quelle est l'enveloppe de NN' quand N décrit Ox ?

Donner l'équation de la dernière courbe.

XXII. Dakar, Mathématiques élémentaires

Retour page 1

✼ Ex. 40. ./1965/dakarmelem/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe on désigne par M l'image du nombre complexe z. Quel est l'ensemble des points M tels que $(z-a)(z-b)$ soit réel ?
(a et b sont deux nombres complexes donnés.)

✼ Ex. 41. ./1965/dakarmelem/exo-2/texte.tex

Construire un cercle (γ) tangent à un cercle donné, (C), et à une droite donnée, (D), en un point donné, A de cette droite.

✫Problème 16 ./1965/dakarmelem/pb/texte

Soit (γ) la courbe d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ par rapport à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; a et b sont deux longueurs données.

1° Á partir de la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

de (γ), montrer que l'équation cartésienne de la tangente au point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ de (γ) est

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

2° Á tout point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ du plan distinct de O, on fait correspondre la droite (m_0) d'équation

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Vérifier que, lorsque $a=b$, la droite (m_0) est la polaire de M_0 par rapport au cercle (γ).

3° Montrer que l'application $m \longmapsto (m_0)$ est une application biunivoque (ou une bijection) de l'ensemble des points du plan distincts de O sur l'ensemble des droites ne passant pas par O.
Pour toute droite (m_0) d'équation $ux+vy+h=0$ ne passant pas par O, donner les coordonnées du point M correspondant.

4° Montrer qu'un condition nécessaire et suffisante pour que (m_0) soit tangente à (γ) est que $M_0 \in (\gamma)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la droite d'équation $ux+vy+h=0$ soit tangente à (γ) est que

$$a^2u^2+b^2v^2-h^2=0.$$

5° Utiliser cette dernière relation pour discuter le nombre de tangentes à (γ) issues d'un point $P(\lambda\ ;\ \mu)$ donné (on pourra former l'équation donnant les pentes de ces tangentes).
En utilisant cette même relation trouver l'ensemble des points M d'où l'on peut mener à (γ) deux tangentes perpendiculaires.

6° On suppose que M_0 décrit une droite (d) donnée ne passant pas par O. Montrer que (m_0) passe par un point fixe. Que devient ce résultat lorsque (d) passe par O ?

XXIII. Dakar remplacement, Mathématiques élémentaires

✼ Ex. 42. ./1965/dakarmelemrem/exo-1/texte.tex

Trouver le reste de la division par 8 du nombre

$$A = 13^{23}\times 27^{41}.$$

✼ Ex. 43. ./1965/dakarmelemrem/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y=\sin x(1+\cos x)$$

et tracer la courbe représentative de ces variations.

Retour page 1

☆Problème 17

./1965/dakarmelemrem/pb/texte

1° On considère, dans un repère orthonormé xOy, les cercles (C) d(équation

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2 = 0,$$

où m est un paramètre réel variable. Montrer que ces cercles forment un faisceau, dont on déterminera les éléments.

2° On considère maintenant les cercles (C') d'équation

$$x^2 + y^2 - 2m'y + k = 0$$

(m' variable, k constant).

Déterminer la valeur de k pour laquelle ces cercles sont orthogonaux aux cercles (C) précédents. Les cercles (C') ainsi déterminés forment une faisceau. Donner l'équation du cercle (C') passant par le point $F(+2\ ;\ +2)$.

3° Montrer que, lorsque (C) varie, la polaire de F par rapport à (C) passe par un point fixe.

4° On considère maintenant les coniques qui admettent F comme foyer et le cercle variable (C) pour cercle principal. Discuter, suivant les valeurs de m, la nature de ces coniques. Trouver, en particulier, les valeurs de m pour lesquelles ces coniques sont des hyperboles équilatères.

5° Montrer que l'axe non focal des ces coniques reste tangent à une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice. Montrer que la directrice associée à F passe par un point fixe. Trouver le lieu du deuxième foyer de ces coniques.

6° Montrer que ces coniques restent tangentes à deux droites fixes.

XXIV. Dijon, Sciences expérimentales

N.B.- Dans tous les textes log désigne le logarithme népérien.

✻ Ex. 44.

./1965/dijonscexp/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $Y = \log u$, où u est une fonction positive définie et dérivable de la variable x.
Calculer directement la dérivée de Y par rapport à x et montrer que

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{u'}{u} \qquad \left(u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right).$$

✻ Ex. 45.

./1965/dijonscexp/exo-2/texte.tex

On considère la fonction

$$Z = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Pour quelles valeurs de x est-elle définie ? Montrer que, dans les intervalles où elle l'est,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x^2-1}.$$

✻ Ex. 46.

./1965/dijonscexp/exo-3/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement la fonction $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.
Calculer l'aire de la surface comprise entre cette courbe, l'axe $0x$ et les droites d'équations

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0{,}5.$$

Retour page 1

✻ Ex. 47. ./1965/dijonscexp/exo-4/texte.tex

Le temps étant désigné par t, on étudie à partir de l'instant zéro le point M de coordonnées

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 3}. \end{cases}$$

Montrer que la trajectoire de M appartient à la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Dans quel sens est-elle parcourue ?
Montrer que l'une des composantes du vecteur vitesse a une expression très simple. En déduire :

a) la courbe à laquelle appartient l'hodographe ;

b) la particularité du vecteur accélération.

XXV. Dijon, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✻ Ex. 48. ./1965/dijonmelem/exo-1/texte.tex

Construire la courbe (C) d'équation

$$y^2 = x^2 + 2x - 3,$$

dans un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. (Unité graphique : 1 cm).
On indiquera la nature de la courbe (C) et l'on en précisera les éléments suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.
On donnera les coordonnées du centre, des sommets et des foyers, ainsi que les équations de asymptotes, dans le repère $x'Ox$, $y'Oy$.

✩Problème 18 ./1965/dijonmelem/pb/texte

Dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le cercle (a), de centre $A(+3\ ;\ 0)$ et de rayon 2, et le cercle (b), de centre $B(0\ ;\ +4)$ et de rayon 4.
Soit M un point variable de l'axe $x'Ox$.
On désigne par x l'abscisse de M, par p_a la puissance de M par rapport au cercle (a), par p_b a puissance de M par rapport au cercle (b).

1° Écrire une équation des cercles (a) et (b).

2° Calculer en fonction de x la valeur du rapport

$$u = \frac{p_a}{p_b}\ ;$$

étudier les variations de la fonction $u(x)$ ainsi définie et en construire la courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé.

3° k étant un nombre réel donné, existe-t-il sur l'axe $x'Ox$ des points M tels que $\dfrac{p_a}{p_b} = k$?

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de ces points M.

Quand il en existe deux, M' et M'', montrer que leurs abscisses, x' et x'', sont liées par une relation indépendante de k.

Écrire cette relation.

4° Montrer qu'il existe un cercle (c) centré sur $x'Ox$ et orthogonal à (a) et à (b) .

En préciser le centre et le rayon. Construire un cercle (d) centre sur $y'Oy$ et orthogonal à (a) et à (b).

Calculer les coordonnées du centre et le rayon R de (d).

On donnera de R la valeur décimale approchée par défaut à $\dfrac{1}{10^3}$ près.

Retour page 1

5° On considère la courbe (Γ) construite au 2. Calculer l'aire arithmétique S limitée par l'axe des abscisses et l'arc (Γ) dont les extrémités sont sur l'axe des abscisses.

Donner de S l'expression exacte la plus simple, puis la valeur décimale approchée par défaut à $\frac{1}{10^3}$ près.

N.B. – Les calculs numériques peuvent être faits à l'aide d'une des tables de valeurs numériques autorisées.

XXVI. Dijon, série Technique et économie

XXVII. Dijon, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon.

XXVIII. Grenoble, Sciences expérimentales

Ex. 49. ./1965/grenoblescexp/exo-1/texte.tex

1° Étudier la variation de la fonction
$$y = x - 1 - \frac{4}{x^2}.$$
(Pour étudier le signe de la dérivée on utilisera l'identité $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 4x + 4)$.)

2° M étant le point d'abscisse x de la représentation graphique correspondante (Γ) et P le point d'abscisse x de la droite (Δ) qui a pour équation $y = x - 1$, calculer $z = \overline{MP}$.

Quel est la signe de z et quelle est sa limite lorsque x croît indéfiniment en valeur absolue ?

3° Figurer (Δ) et (Γ) dans un repère orthonormé, en prenant le centimètre comme unité de longueur.

4° Calculer l'aire, S, de la surface limité par (Γ), l'axe des abscisses et les ordonnées d'abscisses 2 et 4.

Ex. 50. ./1965/grenoblescexp/exo-2/texte.tex

Dans ce qui suit, x représente un nombre positif et les logarithmes sont des logarithmes népériens.
Mettre sous sa forme la plus simple possible l'expression
$$\log \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\log x}.$$
Résoudre l'équation
$$\log\left(\log \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\log x}\right) = 1 + 2\log x.$$

XXIX. Grenoble, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 51. ./1965/grenoblemelem/exo-1/texte.tex

Deux points A et B, et une longueur a étant donnés, construire une ellipse admettant A comme sommet du grand axe, B comme sommet du petit axe et $2a$ comme longueur du grand axe. Discuter.

☆Problème 19 ./1965/grenoblemelem/pb/texte

On considère la fonction $y = \frac{3}{x} + \frac{3}{4}x$.

1° Étudier cette fonction : intervalles de définition, variation, valeurs aux bornes des intervalles de définition.

Montrer que la courbe représentative, (C), admet un centre de symétrie.

Déterminer les asymptotes de cette courbe.

Tracer le courbe (C) dans un système d'axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unité $\vec{i}$ et $\vec{j}$, l'unité de longueur étant le centimètre.

Retour page 1

2° On se propose de déterminer les points de (C) dont les coordonnées x et y sont des entiers relatifs.
Pour cela écrire y sous forme d'une fraction.
Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'un point de (C) ait ses deux coordonnées entières est que x soit pair.
En déduire tous les points de (C) dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
Déterminer l'équation de la tangente en celui des points ainsi obtenus dont l'abscisse x est positive et différente de 2. Construire cette tangente.

3° On considère l'aire limitée par la courbe, l'axe $x'Ox$, et deux parallèles à $y'Oy$, d'abscisses 2 et 4.
Calculer l'aire ainsi limitée.

4° On choisit de nouveaux axes de coordonnées, de même origine que le précédent :
$X'OX$ a même direction et même sens que le vecteur dont les composantes scalaires par rapport à $x'Ox$ et $y'Oy$ sont respectivement 3 et 4 ;
$Y'OY$ est confondu avec $y'Oy$. $\vec{I}$ et $\vec{J}$, vecteurs unité sur $X'OX$ et $Y'OY$ ont le même module que $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Exprimer $\vec{I}$ et $\vec{J}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Les coordonnées d'un point M étant x et y par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ et X et Y par rapport aux axes $X'OX$ et $Y'OY$, déterminer x et y en fonction de X et Y.
En déduire une équation de la courbe (C) par rapport aux axes $X'OX$, $Y'OY$.
Quelle est la nature de cette courbe ? En déterminer l'axe focal ; écrire son équation par rapport aux axes $X'OX$ et $Y'OY$, puis par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
En déduire les sommets de la courbe.
N.B. - les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.

XXX. Grenoble, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon.

XXXI. Lille, Sciences experimentales

XXXII. Lille, Sciences expérimentales

XXXIII. Lille, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 52. ./1965/lillemelem/exo-1/texte.tex

On donne le nombre complexe

$$4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i}).$$

1° Donner le module et un argument de ce nombre.

2° Donner, sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne, les racines cubiques de ce nombre.

Problème 20 ./1965/lillemelem/pb/texte

On considère la courbe (H) d'équation $xy = 1$, rapportée à deux axes orthonormés Ox, Oy. Soit M_1 et M_2 les points de (H) d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0 < x_1 < x_2$.
Les parallèles aux axes Ox et Oy issues de M_1 et M_2 forment le rectangle M_1IM_2J de centre P ; les tangentes (D_1) et (D_2) à la courbe (H) en M_1 et M_2 se coupent en Q.

Retour page 1

1° Déterminer une équation de (D_1) et (D_2) et les coordonnées de Q. Établir que les points O, Q, I, J sont alignés et qu'ils forment une division harmonique .

2° Évaluer, en fonction de x_1 et x_2 l'aire S (positive) comprise entre la corde M_1M_2, l'arc M_1M_2 de la courbe (H).
On suppose que M_1 et M_2 décrivent la portion de (H) située dans le demi-plan $x > 0$, de telle façon que $\frac{x_2}{x_1} = t$ demeure constant supérieur à1. Montrer que S est constante, ainsi que le produit des coordonnées de Q. Quel est l'ensemble des points Q ?

3° Calculer la dérivée de la fonction f telle que $S = f(t)$. Calculer la limite de $u = \frac{S}{t}$ quand $t \to \infty$, puis celle du produit $S = u \times t$.
En déduire la variation de S en fonction de t quand $t \geqslant 1$ (il n'est pas demandé de graphe) et montrer que, si S est constant, t est constant.

4° t demeurant constant, évaluer les rapports

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{PI}}.$$

Quel est l'ensemble des points P ? Prouver que M_1M_2 est la tangente en P à cet ensemble et que les aires des triangles IM_1M_2, QM_1M_2 et OM_1M_2 sont constantes.

XXXIV. Lille, série Technique et économie

XXXV. Lille, remplacement

Même sujets que ceux de Paris.

XXXVI. Lyon, Sciences expérimentales

Ex. 53. ./1965/lyonscexp/exo-1/texte.tex

1° Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{2x - 1}.$$

Montrer que y peut se mettre sous la forme

$$y = ax + b + \frac{c}{2x - 1},$$

a, b, c étant deux coefficients, qu'on déterminera.

2° Utiliser la courbe obtenue pour étudier, suivant les valeurs du paramètre m, l'existence des racines de l'équation

$$2x^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0.$$

3° Appliquer la méthode précédente à la recherche, suivant les valeurs du paramètre m, du nombre de solutions de l'équation en α :

$$2\cos^2\alpha - (2m - 1)\cos\alpha + m + 1 = 0,$$

α désignant la mesure en degrés d'un angle d'un triangle.

Ex. 54. ./1965/lyonscexp/exo-2/texte.tex

On lance 3 dés. Quelle est la probabilité pour obtenir :

1° un total de 16 ;

2° un total au moins égal à 16 ;

3° un total strictement supérieur à 16 ?

Retour page 1

✻ Ex. 55. ./1965/lyonscexp/exo-3/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2e^{2x} - 7e^{-2x} = 13.$$

XXXVII. Lyon, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✻ Ex. 56. ./1965/lyonmelem/exo-1/texte.tex

Sur le cercle de centre O et de rayon 1, tracé dans un repère orthonormé xOy, on place les points A et B tels que

$$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}, \quad (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}.$$

1° Quelles sont les nombres complexes ayant respectivement pour images A et B ?

2° Évaluer, de deux façons différentes, leur produit.
En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

☆**Problème 21** ./1965/lyonmelem/pb/texte

Dans un repère orthonormé xOy, on place le point C de coordonnées $(0\ ;\ R)$, R désignant un nombre positif donné. On trace le cercle (C) de centre C et de rayon R et l'on désigne par M un point variable de ce cercle tel que $(\overrightarrow{Cx},\ \overrightarrow{CM}) = \varphi$, φ variant de 0 à 2π.

1° Soit H la projection orthogonale de M sur Ox et P le milieu de HM.
Trouver le lieu géométrique du point P.
Préciser les éléments de ce lieu : centre, foyers, directrices, excentricité et tangent en P.

2° Évaluer en fonction de R et φ, les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point M.
Pour quelles valeurs de φ ces coordonnées vérifient-elle la relation

$$y + 2x = a,$$

a désignant un nombre algébrique donné ?
Discuter suivant les valeurs de a.
Retrouver géométriquement les résultats de cette discussion.

3° La droite OM rencontre CP en D et, en E, le diamètre (Δ) du cercle (C) parallèle à Oy ; montrer que la division $(O,\ M,\ D,\ E)$ est harmonique.
Former l'équation de la droite OM ; trouver les coordonnées du point D en fonction de R et φ ; en déduire le lieu géométrique du point D.
Préciser les points communs à ce lieu et au cercle (C) ; expliquer ce résultat.

4° On effectue l'inversion de centre O et de puissance $2R^2$. Montrer que le point D a pour inverse le symétrique D' du point M par rapport à E.
En déduire, les coordonnées de D' en fonction de R et φ, puis l'équation du lieu de D' ; construire ce lieu.

XXXVIII. Lyon, série Technique et économie

XXXIX. Lyon remplacement, Sciences expérimentales

Retour page 1

XL. Lyon remplacement, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✻ Ex. 57. ./1965/lyonmelemrem/exo-1/texte.tex

Les lettres e et x désignant respectivement la base des logarithmes népériens et l'inconnue, résoudre, sur le corps de réels, l'équation

$$7\mathrm{e}^{-5x} - 8\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Les valeurs numériques des solutions seront données à l'approximation permise par les tables usuelles.

☆**Problème 22** ./1965/lyonmelemrem/pb/texte

Sur un axe $x'x$ d'origine O on donne deux points fixes A et B, tels que $\overline{\mathrm{OA}} = -a$ et $\overline{\mathrm{OB}} = b$; a et b étant deux nombres réels tels que $a > b > 0$.
Un axe zz' tourne autour de O.

1° N désignant le symétrique de A par rapport à $z'z$ et P celui de B par rapport à $z'z$, déterminer chacun des ensembles de points auxquels appartiennent N et P.

2° Les droites AP et NB se coupent en M.

a) Montrer que M appartient à $z'z$.

b) La perpendiculaire en M à $z'z$ coupe $x'x$ en O'. Prouver que O' est un point fixe.

c) En déduire que l'ensemble des points M, lorsque $z'z$ varie, est un cercle (M), dont on calculera le rayon et dont on précisera l'abscisse du centre, noté F.

3° a) Démontrer que le cercle (M) précédent et le cercle $(M\mathrm{AB})$ circonscrit au triangle $M\mathrm{AB}$ sont orthogonaux.
En déduire la tangente en M au cercle $(M\mathrm{AB})$ et l'enveloppe de cette tangente.

b) ω désignant le centre du cercle $(M\mathrm{AB})$, on considère la droite (Δ) perpendiculaire en ω à $F\omega$.
Déterminer l'enveloppe de (Δ) lorsque M varie. On indiquera avec précision les éléments fondamentaux et l'on construira le point de contact, μ, de (Δ) avec son enveloppe.

4° On pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.

a) Déterminer l'intervalle de variation de θ lorsque M décrit tout l'ensemble auquel il appartient.

b) Calculer BM^2 en fonction de a, b et θ.

c) Faisant l'hypothèse supplémentaire $a = 2b$, étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = BM$.

d)

e)

XLI. Montpellier

Même sujets que pour Aix Marseille.

XLII. Nancy, Sciences expérimentales

XLIII. Nancy, Mathématiques élémentaires

✻ Ex. 58. ./1965/nancymelem/exo-1/texte.tex

Déterminer les entiers naturels x et y qui admettent comme P.G.C.D le nombre 11 et comme produit le nombre 10 164.

Retour page 1

✰Problème 23

./1965/nancymelem/pb/texte

Soit un repère orthonormé $x'ox$, $y'Oy$ et un point I de coordonnées a et b. Écrire une équation du cercle (C) de centre I, de rayon R, puis choisir R pour que la puissance de l'origine O par rapport au cercle (C) soit égale à 1.
Soit E l'ensemble des cercles (C) ainsi définis. On propose, dans toute la suite du problème, l'étude de certains sous-ensembles, E_1, E_2, E_3 de l'ensemble E.

1° Soit E_1 l'ensemble des cercles (C_1), appartenant à E et tels que $b = 2a$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Déterminer les cercles (C_1) qui passent par un point donné M, de coordonnées $(x_0,\ +1)$. Discuter.

c) Caractériser géométriquement l'ensemble E_1 et donner une solution géométrique de la question précédente.

2° Soit E_2 l'ensemble des cercles (C_2) appartenant à E, qui passent par le point $P(+1,\ +1)$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Démontrer que ces cercles passent par un deuxième point fixe, P'.

c) Déterminer par le calcul et construire géométriquement les cercles (C_2) tangents à $x'Ox$.

3° Soit E_3 l'ensemble des cercles (C_3) appartenant à E et tangents à la droite (D) d'équation $y = -1$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Retrouver géométriquement cet ensemble en faisant une inversion de centre O, de puissance 1, et en montrant que les cercles (C_3) sont tangents à un cercle fixe.

XLIV. Nancy, Mathématiques et Technique

Ex. 59. ./1965/nancymatech/exo-1/texte.tex

Trouver les expressions cartésiennes et trigonométriques des racines cubiques du nombre complexe $z = -8\,\mathrm{i}$.

Ex. 60. ./1965/nancymatech/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^3 x = 0.$$

✰Problème 24

./1965/nancymatech/pb/texte

On considère un faisceau linéaire de cercles, à points de base A et B. On appelle (Δ) la médiatrice du segment AB. Un cercle variable (Ω), de centre ω, appartenant au faisceau, coupe (Δ) en D et D'.
Les droites BD et BD' coupent respectivement la tangente en A à (Ω) en C et C'.

1° Montrer que AD et AD' sont bissectrices de l'angle BAC du triangle ABC. En déduire que l'ensemble des points C et C' est une hyperbole (H) de foyer A et de directrice associée (Δ). Déterminer les éléments de (H).

On appellera F le second foyer de (H). Montrer que, si K est le symétrique de A par rapport à B, on a

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FK}} = -\frac{1}{2}.$$

2° Soit I le pôle de la droite BD par rapport au cercle (Ω). Montrer que CI passe par K. Soi CT la tangente, autre que CA, menée par C à (Ω). En étudiant le faisceau des droites CI, CB, CT, CA, prouver que CT passe par F. Quel est le point de concours des tangentes à l'hyperbole (H) en C et C' ?

3° On suppose que C est du même côté que A par rapport à (Δ) et que le triangle ABC existe. Soit a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. Démontrer que $a^2 = b(b+c)$ et que $b < a < 2b$.

4° On suppose que a, b et c sont des nombres entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Démontrer que b et c sont premiers entre eux, ainsi que b et $b+c$.

En déduire que b et $b+c$ sont des nombres parfaits .

On donne $b = 25$; déterminer a et c.

XLV. Madagascar, Maths élémentaires

✱ Ex. 61. ./1965/madagascarmelem/exo-1/texte.tex

On désigne pat θ la mesure d'un arc compris entre π et 2π radians.
Calculer le module et l'argument de chacune des racines carrés du nombre complexe

$$z = \frac{1+\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}.$$

✱ Ex. 62. ./1965/madagascarmelem/exo-2/texte.tex

Soit x un nombre réel. Discuter, par la méthode graphique, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de racines de l'équation

$$x - \sqrt{-3x^2+6x+9} = m(x-3),$$

en utilisant le graphe, construit en repère orthonormé, de la fonction

$$y = x - \sqrt{-3x^2+6x+9}.$$

☆**Problème 25** ./1965/madagascarmelem/pb/texte

Soit deux cercles (O) et (O'), de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' $(R > R')$, extérieurs l'un à l'autre, et de rayons parallèles variables, OA et OA', de même sens. La droite AA' recoupe (O) en B et (O') en B'.
La tangente en B à (O) coupe en M la tangente en A à (0) et en Q la tangente en A' à (O').
La tangente en B' à (O') coupe en N la tangente en A' à (O') et en P la tangente en A à (O).

1° Montrer que la droite MN passe par un point fixe, U, et que les points P et Q sont sur une droite fixe. Quels sont les ensembles des points M et N ?

2° Les droites OA et $O'B'$ se coupent en S et les droites OB et $O'A'$ en S'. Quel est l'ensemble des points S et S' ?
Déterminer les tangentes à cet ensemble en S et S'. Montrer que le cercle de centre S et de rayon SA et le cercle de centre S' et de rayon $S'A'$ ont orthogonaux à un cercle fixe, de centre U.

3° Le cercle (P) de centre P et de rayon PA recoupe le cercle (O) en C et le cercle (O') en C' et B'.
Montrer que chacune des droites AC et $B'C'$ passent chacune par un point fixe quand A varie. Que dire du point T intersection de AC et $C'B'$?
Montrer que les deux cercles de diamètre PT forment un faisceau linéaire à points de base.

N.B. – la question 3 est indépendante de la question 2

XLVI. Montréal & New York, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✱ Ex. 63. ./1965/newyorkmelem/exo-1/texte.tex

Chercher tous les ensembles de trois nombres entiers naturels x, y et z tels que

$$\begin{cases} 2x = y+z \\ x+y+z = xyz. \end{cases}$$

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n \ldots\}.$$

✱ Ex. 64. ./1965/newyorkmelem/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2\left(\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x\right) = \sqrt{2} - 1.$$

On placera sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

Retour page 1

XLVII. Paris, Sciences expérimentales

Ex. 65. ./1965/parisscexp/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathrm{C}\,np$ le nombre de combinaisons p à p de n éléments.
Trouver une fraction égale à $\mathrm{C}\,74 : \mathrm{C}\,93$ et telle que le plus grand commun diviseur de ses termes soit 24.

Ex. 66. ./1965/parisscexp/exo-2/texte.tex

On rappelle que la dérivée de e^x et e^x.

1° Calculer les deux premières dérivées de la fonction

$$y(x) = \mathrm{e}^x(3x+5).$$

2° Établir la formule donnant la dérivée d'ordre n de y.

3° Exprimer la somme

$$y(x) + y'(x) + \cdots + y^{(n)}(x)$$

sous forme aussi réduite que possible.

Ex. 67. ./1965/parisscexp/exo-3/texte.tex

1° Étudier les variations de la fonction

$$x(t) = 2\cos^2 t + \sin 2t \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

2° Tracer le graphe (C) de cette fonction par rapport à un système d'axes orthonormé $t'Ot$, $x'Ox$.

3° Construire la tangente (C) au point d'abscisse $t = 0$.

4° Évaluer l'aire du domaine limité par les deux demi-droites Ox et Ot et l'arc de courbe (C) qui correspond à $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 68. ./1965/parisscexp/exo-4/texte.tex

L'équation $x(t) = 2\cos^2 t + \sin 2t$, dans laquelle t prend toutes les valeurs réelles, est l'équation horaire du mouvement d'un point M sur un axe $x'Ox$.
Montrer que ce mouvement est un mouvement vibratoire simple, dont on cherchera l'équation réduite sous la forme $x = a + b\cos(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$ et $b > 0$, et dont on donnera les caractéristiques.

XLVIII. Paris, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 69. ./1965/parismelem/exo-1/texte.tex

Trouver tous les entiers naturels diviseurs du nombre 108.
Trouver tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels tels que leur plus grand commun diviseur d et leur plus petit commun multiple m satisfassent à

$$m - 3d = 108, \qquad 10 < d < 15.$$

Ex. 70. ./1965/parismelem/exo-2/texte.tex

a) Déterminer, en posant $x = \dfrac{1}{u}$, la limite de $x\ln x$ quand x tend vers zéro $(x > 0)$.

b) Déterminer les nombres a et b de manière que la fonction $z = x(a\ln x + b)$ soit une primitive de la fonction $y = -\ln x$.

c) On désigne par $S(t)$, pour $0 < t < 1$, l'aire du domaine plan délimité par l'axe $x'x$ et la courbe

$$y = -\ln x$$

compris entre les parallèles à $y'y$ d'abscisses t et 1.
Calculer $S(t)$ et déterminer la limite de $S(t)$ quand t tend vers zéro. (Le repère utilisé est supposé orthonormé.)

Retour page 1

☆Problème 26 *./1965/parismelem/pb/texte*

Par rapport à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ (origine O, axes $x'Ox$ et $y'Oy$) une conique E a pour équation

$$12x^2+16y^2+12ax-9a^2=0,$$

où a désigne la mesure d'une longueur donnée ($a>0$).

1° Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, et de ses sommets. Écrire les équations de ses directrices D et D' (on désignera par D celel qui rencontre l'axe focal en un point d'abscisse positive). Calculer son excentricité e.

Soit M un point quelconque de E. Calculer en fonction de a et de l'abscisse x du point M l'expression rationnelle de la longueur OM. On pose

$$OM=\rho \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM})=\theta.$$

Calculer ρ en fonction de a et de θ.

2° A chaque point M de E, de coordonnées x , y, on associe le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$, affixe de M.

Écrire l'expression trigonométrique de z (on désignera par θ son argument et l'on exprimera le module de z en fonction de a et de θ).

Soit z' et z'' les affixes des deux points M' et M'' de E, d'arguments respectifs α et $\alpha+\pi$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z'-z''$ et en déduire la longueur du segment $M'M''$.

b) On considère, dans le plan, le point P dont l'affixe Z est définie par la relation :

$$\frac{2}{Z}=\frac{1}{z'}+\frac{1}{z''}.$$

Écrire l'expression trigonométrique de Z. En déduire le lien géométrique de P quand α varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M', M'' ?

3° Soit (J) l'inversion de pôle O qui laisse invariant le cercle principal de E et m', m'', p les transformés de M', M'', P par (J). Quelle particularité présente la figure formée par les trois points m', m'', p ? Calculer la longueur du segment $m'm''$. Quel est le lieu géométrique de p ? En déduire une définition géométrique de la courbe transformée de E par (J).

XLIX. Paris composition refaite, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✻ Ex. 71. *./1965/parismelembis/exo-1/texte.tex*

1° Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\tan\alpha}$ suivant la valeur de l'angle α.

Placer, relativement à un repère orthonormé, les images A et B des nombres

$$z_0=z=\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z=\frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\frac{2\pi}{3}}.$$

2° Soit M l'image du nombre complexe

$$Z=\frac{1+\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}\tan\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}x\left(1+\mathrm{i}\tan\frac{2\pi}{3}\right)},$$

où x est un nombre réel quelconque.

Calculer le module r et l'argument θ de $\dfrac{Z-z_0}{Z-z_1}$.

Quels sont les affixes complexes des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$?

Du calcul de r et θ déduire l'ensemble des points M obtenus lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

✰Problème 27

./1965/parismelembis/pb/texte

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $(Ox,\ Oy)$.

1° Soit $a,\ b,\ c,\ d$ quatre nombres réels. On considère les deux systèmes de relation

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+c^2=1,\\ b^2+d^2=1,\\ ab+cd=0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \begin{cases} |ad-bc|=1\\ a^2=d^2,\\ b^2=c^2. \end{cases}$$

Montrer, soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que,si $\alpha^2+\beta^2=1$, il existe au moins un angle θ tel que $\alpha=\cos\theta$ et $\beta=\sin\theta$), que (1) implique (2). La réciproque est-elle vraie ?

2° On considère la transformation ponctuelle $\mathscr{R}$ qui, à chaque point $m(x,\ y)$, fait correspondre le point $M'(X',\ Y')$ tel que

$$\begin{cases} X'=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y,\\ Y'=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont les points doubles de $\mathscr{R}$?

b) Montrer que $Om=OM'$ et que, si P' est l'image de p, on a toujours $pm=P'M'$.

c) Calculer, à $2k\pi$ près, l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{Om};\overrightarrow{OM'}}\right)$ et reconnaître la nature de $\mathscr{R}$.

3° Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathscr{S}$ qui à chaque point $m(x,\ y)$ fait correspondre le point $M''(X'',\ Y'')$ tel que

$$\begin{cases} X''=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y,\\ Y''=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont ses points doubles ?

b) Montrer que $\mathscr{S}$ est une symétrie axiale.

4° Plus généralement, tout système de relations

$$\begin{cases} X=ax+by,\\ Y=cx+dy, \end{cases}$$

où $a,\ b,\ c,\ d$) sont des nombres réels vérifiant l'inégalité $ad-bc\neq 0$, définit une transformation ponctuelle $\mathscr{T}$ pour laquelle tout point $m(x,\ y)$ a pour image $M(X,\ Y)$.

a) Rechercher un ensemble de conditions nécessaire et suffisant entre les nombres $a,\ b,\ c,\ d$ pour que la transformation correspondante soit une isométrie, c'est-à-dire conserve les distances (M et P étant les images de m et p, on a $mp=MP$ quels que soient m et p).
Á quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement ?
Á quelle condition est-elle une symétrie axiale ?

b) $\mathscr{T}$ peut-elle être une similitude ?

5° On se propose maintenant d'étudier la transformation $\mathscr{T}'$ particulière définie par

$$\begin{cases} X=x,\\ Y'=3x+2y. \end{cases}$$

a) Á-t-elle des points doubles ?

b) Quelle est la figure transformée, soit d'une droite parallèle à Ox, soit d'une droite parallèle à Oy ?

c) Donner un procédé graphique simple de construction de l'image M d'un point quelconque m et reconnaître la transformation $\mathscr{T}'$.

N.B.- Les questions 1, 2 et 3 du problème sont indépendantes.

Retour page 1

L. Paris, série technique et économie

✻ Ex. 72. ./1965/paristecheco/exo-1/texte.tex

Démontrer que, si A, B, C sont les angles d'un triangle, on a la relation

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

✻ Ex. 73. ./1965/paristecheco/exo-2/texte.tex

On met dans un sac les lettres mobiles susceptibles de former le mot « CONSTANTINOPLE » et l'on tire successivement au hasard 6 lettres de ce sac, chacune d'elles, après chaque tirage, restant hors du sac.
Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre d'obtention, ces lettres forment le mot « PANTIN » ?

LI. Pondichéry , Maths élémentaires

✻ Ex. 74. ./1965/pondicherymelem/exo-1/texte.tex

Dans le plan rapporté à deux axes orthonormés, Ox et Oy, on demande de déterminer la nature de l'ensemble des points M de coordonnées x, y vérifiant l'équation

$$y^2 - 2x^2 + 3x = 0,$$

puis de construire le graphe correspondant.
Dans le plan orienté, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ tels que leurs modules soient égaux, leurs supports perpendiculaires et sécants en un point O de manière que

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{2}.$$

☆**Problème 28** ./1965/pondicherymelem/pb/texte

1° Expliquer pourquoi il existe une rotation transformant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en le vecteur $\overrightarrow{BD}$ déterminer son centre (noté I) et son angle.

2° Déterminer, de même, le centre, J de la rotation associant le vecteur $\overrightarrow{DB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$.
En désignant par M le milieu de AC, par N celui de BD, déterminer la forme du quadrilatère $IMJN$.

3° Construire les points C et D, connaissant seulement les points A et B en position, la longueur BC et la longueur CD. Discuter.

4° On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I respectivement sur chacun des cercles de diamètres AB et CD.
Démontrer que les points P, I, J sont alignés. Démontrer, de même, que les points Q, I, S sont alignés, sachant que Q et S sont diamétralement opposés à J sur les cercles de diamètres BC et AD.
Prouver que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IR})$ et que $\frac{IA}{IP} = \frac{IC}{IR}$ = Constante ; en déduire la transformation qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{PR}$. (On donnera le nom de cette transformation et l'on déterminera ses éléments fondamentaux réduits.)

N.B. – La résolution de la question **??** n'est pas indispensable à celle des autres questions.

LII. Rennes, Sciences expérimetales

✻ Ex. 75. ./1965/rennesscexp/exo-1/texte.tex

a) Déterminer les diviseurs communs de 4 512 et 4 128.

b) Trouver un nombre entier d tel que, si l'on divise par d les nombres 4 525 et 4 147, les restes obtenus soient respectivement 13 et 19. Préciser le nombre des solutions.

Retour page 1

✻ Ex. 76. ./1965/rennesscexp/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$\log(x+1)-\log(2-x)+\log 2=\log 7-\log(4-x).$$

✻ Ex. 77. ./1965/rennesscexp/exo-3/texte.tex

Donner, sans démonstration, l'expression de la dérivée du produit uv, où u et v désignent des fonctions d'une variable.

✻ Ex. 78. ./1965/rennesscexp/exo-4/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y=\frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

La représenter graphiquement, en choisissant un repère orthonormé.

LIII. Strasbourg, Sciences expérimentales

LIV. Strasbourg, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

✻ Ex. 79. ./1965/strasbourgmelem/exo-1/texte.tex

Montrer que le polynôme

$$x^3-8x^2+25x-26$$

est divisible par $x-2$. En déduire ses racines, réelles ou complexes.

✻ Ex. 80. ./1965/strasbourgmelem/exo-2/texte.tex

Mettre l'expression $\sqrt{3}\sin x-\cos x$ sous la forme $a\cos(x-\varphi)$.
Étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{3}\sin x-\cos x+2}.$$

☆**Problème 29** ./1965/strasbourgmelem/pb/texte

Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On considère, dans (P), les droites

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{d'équation} & x=a \quad (a>0), \\ (D') & \text{d'équation} & x=-a\ . \end{array}$$

On désigne par E le complémentaire (dans P) de la réunion des droites $x'Ox$, (D), (D'), et par C l'intersection de $x'Ox$ et de (D), par B l'intersection de $x'Ox$ et de (D').

1° Soit $M_1\in E$ et A', B', C' les projections orthogonales de M_1 respectivement sur $x'Ox$, (D) et (D'). Calculer les coordonnées de A', B', C' en fonction des coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de M_1.
Calculer les coordonnées du centre, I, du cercle (γ) circonscrit au triangle $A'B'C'$.

2° a) Soit M_2, de coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$, le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que

$$x_2=-x_1, \qquad y_2=\frac{a^2-x_1^2}{y_1}.$$

b) On désigne par $\mathscr{T}$ la transformation qui, à $M_1\in E$, fait correspondre M_2 : montrer que $\mathscr{T}$ est une application biunivoque de E sur E. Montrer que $\mathscr{T}$ est involutive.
Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.

Retour page 1

3° a) Soit (Δ) la droite d'équation

$$x = b \quad (b \neq \pm a) \quad \text{et} \quad (\Delta') = (\Delta) \cap E.$$

Déterminer le transformé $\mathscr{T}(\Delta')$ de (Δ') par $\mathscr{T}$ [c'est-à-dire l'ensemble des points $\mathscr{T}(M_1)$ où $M_1 \in (\Delta')$].

b) Soit (Δ_1) la droite d'équation

$$y = c \quad (c \neq 0) \quad \text{et} \qquad (\Delta'_1) = (\Delta_1) \cap E.$$

Déterminer l'ensemble $\mathscr{T}(\Delta'_1)$.

4° Montrer que M_2 est le centre d'un cercle passant par les symétriques, A_2, B_2, C_2, de M_1 respectivement $x'Ox$, (D) et (D').

Montrer que B est le milieu de A_2C_2.

Comparer les angles de droites $(BC',\ BM_1)$ et $(BM_2,\ BC)$; quelles sont les bissectrices de $(BM_1,\ BM_2)$?

Déterminer de façon analogue les bissectrices de $(CM_1,\ CM_2)$.

Déduire de ce qui précède une construction simple de $M_2 = \mathscr{T}(M_1)$.

Retrouver les propriétés de la transformation $\mathscr{T}$ établies au 2b.

5° Montrer qu'il existe une conique et une seule de foyer M_1 $(M_1 \in E)$ tangente à (D), (D') et $x'Ox$. La déterminer et préciser son second foyer.

Chapitre 6

1966.

Sommaire

I. Orléans, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 81. ./1966/orleansmelem/exo-1/texte.tex

a) Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin 2x.$$

b) Étudier le signe de cette dérivée pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 82. ./1966/orleansmelem/exo-2/texte.tex

On donne un repère orthonormé Ox, Oy, Oz.

a) Trouver l'équation du cône de révolution d'axe Oz, de sommet S de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,4)$ et tangent à la droite (D) du plan xOy qui a pour équation dans ce plan $3x + y - 3 = 0$.

b) Trouver l'équation du plan tangent au cône et contenant (D).

Ex. 83. ./1966/orleansmelem/exo-3/texte.tex

On donne, dans un plan P, un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et deux points situés sur $x'Ox$: A d'abscisse $+1$, et A' d'abscisse -1. On se propose d'étudier une transformation ponctuelle, T. M étant un point quelconque du plan, la perpendiculaire à $A'M$ passant par A et la perpendiculaire à AM passant par A' se coupent en un point M'. M' est la transformé de M par la transformation T.

A- 1. On désigne par x, y les coordonnées de M, par X, Y les coordonnées de M'.
   Donner les expressions de X et de Y en fonction de x et y. Tout point M du plan a-t-il un transformé M', bien déterminé ?
   Donner les expressions de x et y en fonction de X et Y.
2. Démontrer géométriquement que MM' est perpendiculaire à $x'Ox$ et trouver une relation simple entre $\overline{IA}$, $\overline{IA'}$, $\overline{IM}$ et $\overline{IM'}$, en désignant par I le point commun aux droites AA' et MM'.

B- Déterminer l'ensemble des points M' dans les cas suivants :

1. M décrit la droite d'équation $y = 2x - 1$; construire l'ensemble des points M'.
2. M décrit la droite d'équation $y = 3(x-1)$; préciser la nature de l'ensemble des points M'.
3. M décrit la droite d'équation $y = k$; préciser la nature de l'ensemble des points M'.
4. M décrit la parabole déterminée par ce qui suit : $y'y$ est axe de symétrie, AA' est corde focale, l'ordonnée du sommet est négative.
5. M décrit un cercle passant par A et A'.
6. M décrit une ellipse de grand axe AA'. (On désignera par b le demi-petit axe de cette ellipse).

II. Orléans, série Mathématiques et technique.

Ex. 84. ./1966/orleansmt/exo-1/texte.tex

Soit deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, a et b deux longueurs données, (E) l'ensemble des points M définis en fonction du paramètre t par

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

1° Calculer les composantes du vecteur dérivé de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}$ de la variable t. Former une équation de la tangente à (E) en M.

2° Déterminer les valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes à (E) passant par A donné, de coordonnées $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$.

Ex. 85. ./1966/orleansmt/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unitaires $\imath$ et $\jmath$.

1. a) Soit (A) l'affinité qui a pour axe la droite d'équation $y = -x$, pour direction $y'Oy$, pour rapport 2. Montrer qu'elle transforme le point $M(x\,;\,y)$ en le point $M'(x'\,;\,y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

   b) Soit (T) la transformation ponctuelle qui à $M(x\,;\,y)$ fait correspondre $M_1(x_1\,;\,y_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = x + 2y, \\ y_1 = x. \end{cases}$$

   Montrer que (T) est le produit ordonné de (A) par une deuxième transformation, (S), que l'on définira.
   Soit $(T) = (S) \circ (A)$.

   c) Définir la transformation (T^{-1}) réciproque de (T). Calculer $x_1 + y_1$ et $x_1 - 2y_1$.

2. a) Montrer que les directions définies par $y = -x$ et $y = \dfrac{x}{2}$ sont invariantes dans (T).

   b) Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathscr{H})$ d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$? Déterminer et représenter dans le plan xOy l'ensemble $\mathscr{H}_1$ transformé de $\mathscr{H}$ par (T).

3. Dans cette question, les coordonnées x et y de M sont des entiers positifs. Soit $M_1(x_1\,;\,y_1)$ l'homologue de M dans la transformation (T), $M_2(x_2\,;\,y_2)$ l'homologue de M_1 dans la transformation (T), et soit $M_n(x_n\,;\,y_n)$ l'homologue de $M_{n-1}(x_{n-1}\,;\,y_{n-1})$ dans la transformation (T), pour tout entier n positif.
   On considère la suite des fractions

$$r_0 = \frac{y}{x},\ r_1 = \frac{y_1}{x_1},\ r_2 = \frac{y_2}{x_2},\ \dots,\ r_n = \frac{y_n}{x_n}.$$

   a) Montrer que si r_0 est irréductible et x impair, toues les fractions de la suite sont irréductibles. Écrire les cinq premières fractions de la suite lorsque $x = y = 1$.

   b) Montrer que $r_n = \dfrac{1}{1 + 2r_{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$ et vérifier que la relation $v = \dfrac{1}{1+2u}$ peut se mettre, pour $u > 0$ sous la forme

$$\frac{v - \frac{1}{2}}{v + 1} = -\frac{1}{2}\,\frac{u - \frac{1}{2}}{u + 1}.$$

   c) En déduire l'expression du rapport $\dfrac{r_n - \frac{1}{2}}{r_n + 1}$, en fonction de n et du rapport $\dfrac{r_0 - \frac{1}{2}}{r_0 + 1}$, et la limite de r_n quand n entier tend vers $+\infty$.

   d) Déterminer l'expression $(x_n + y_n)$ en fonction de n et de $(x + y)$. Montrer que, quand n entier tend vers $+\infty$, $(x_n + y_n)$, x_n et y_n tendent vers $+\infty$.
   Dire ce que devient, quand n tend vers $+\infty$, la somme

$$\Sigma_n = \ln r_0 + \ln r_1 + \cdots + \ln r_n.$$

   N.B. la question 3 est indépendante de la question 2

Retour page 1

III. Paris, série Mathématiques élémentaires et Technique.

❋ Ex. 86. ./1966/parismelem/exo-1/texte.tex

a) Étudier la variation de la fonction f de la variable réelle x définie par

$$y = f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

b) Construire sa représentation graphique.

❋ Ex. 87. ./1966/parismelem/exo-2/texte.tex

a) z étant un nombre complexe, développer $(z+1)^3$. Résoudre l'équation

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0.$$

b) Construire les images des racines.

c) Trouver tous les nombres entiers relatifs n tels que $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ soit divisible par 8.

Retour page 1

Chapitre 7

1967.

Sommaire

I. Dijon, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 88. ./1967/dijonC/exo-1/texte.tex

Soit une droite D, un point O appartenant à cette droite et un nombre réel α. On désigne par S la symétrie orthogonale par rapport à D et par R la rotation de centre O et de mesure α. En décomposant R en le produit de deux symétries convenables, étudier les transformations $R \circ S$ et $S \circ R$.

Baccalauréat Dijon, Juin 1967

II. Mexico, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 89. ./1967/mexicomelem/exo-1/texte.tex

1. α étant un arc compris entre 0 et π (unité le radian), on donne

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

   Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$. En déduire α.

2. x étant compris entre 0 et 2π, résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3+2\cos x} > 2\sin x.$$

Ex. 90. ./1967/mexicomelem/exo-2/texte.tex

A) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère la transformation ponctuelle S qui, au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ \\ y' = x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation est involutive.
2. Déterminer l'ensemble, (Δ), des points doubles, ainsi que l'ensemble des points I, milieu de MM'.
3. Montrer que MM' reste parallèle à une direction fixe, que l'on comparera à la direction de (Δ).

4. Déduire de ce qui précède que S est une transformation ponctuelle simple, que l'on définira géométriquement.
5. Tracer (Γ) ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{x}.$$

Quelle est la transformée de (Γ) par S ?

B) On considère maintenant la transformation T qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \\ y' = x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que T admet un seul point double, dont on calculera les coordonnées.
2. Comparer les longueurs de OM et de OM'.
3. θ étant un nombre réel, quel est le transformé du point M de coordonnées $(\sin\theta\ ;\ \cos\theta)$?
4. Déduire de ce qui précède que T est un déplacement, que l'on caractérisera.
5. Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées $S \circ T$ et $T \circ S$.

III. Nantes, série mathématiques élémentaires et technique.

Ex. 91. ./1967/nantesC/exo-1/texte.tex

Dans un plan orienté, on donne trois droites D_1, D_2, D_3 concourantes en O et telles que :

a) $\dfrac{\pi}{6}$ est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{D_1,\ D_2})$;

b) $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{D_2,\ D_3})$.

On désigne respectivement par S_1, S_2, S_3 les symétries orthogonales par rapport à ces trois droites.

1. Indiquer la nature de l'application T définie par : $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
2. Indiquer la nature de l'application T_1 définie par : $T = S_1 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

Baccalauréat Nantes, Juin 1967

IV. New York, série mathématiques élémentaires et technique, remplacement

Ex. 92. ./1967/newyorkelemrem/exo-1/texte.tex

Le plan E_2 est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$. On désigne par $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$, par $\mathscr{S}$ la similitude de centre S, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Calculer, en fonction de coordonnées x et y d'un point M, celles de x_1 et y_1 de $M_1 = \mathscr{H}(M)$.
   b) Calculer en fonction des coordonnées x' et y' du point $\mathscr{S}$, de $r = SM$, et d'une mesure α de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{SM}}\right)$, les coordonnées x et y d'un point M et celles x_2 et y_2 de $M_2 = \mathscr{S}(M)$.
   c) Déduire de la question 1b les expressions de x_2 et y_2 en fonction de x', y', x et y.

2. Démontrer que M_2 est égal à M_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{3}{2}y'. \end{cases}$$

   Ces relations définissent une nouvelle application, $\mathscr{T}$ qui, à tout point S, associe un point $M = \mathscr{T}(S)$.
3. Quelle est la figure transformée par $\mathscr{T}$ de la droite d'équation $ux' + vy' + w = 0$?

   Quelle est la figure transformée par $\mathscr{T}$ du cercle de centre $C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon R ?
4. $S_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ étant fixé ($x_0 > 0$), soit $M_0 = \mathscr{T}(S_0)$.

   Quel est l'ensemble des points $S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ pour lesquels $\overrightarrow{S_0M}$ et $\overrightarrow{SM_0}$ sont linéairement indépendants ?
5. Démontrer que $\mathscr{S}$ est une similitude directe de centre O.

Baccalauréat New York, Septembre 1967.

V. Paris, série Mathématiques élémentaires et technique.

Ex. 93. *./1967/parismelem/exo-1/texte.tex*

La variable x décrivant l'intervalle $[0\,;\pi]$, étudier la variation de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

et construire son graphique dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
Déterminer, à l'aide d'une table, l'abscisse, en radians, du point où ce graphique coupe l'axe $x'Ox$.

Ex. 94. *./1967/parismelem/exo-2/texte.tex*

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, la position d'un point mobile M, à l'instant de date t, est défini par les relations

$$x = 1 - 3t^2 \quad \text{et} \quad y = 3t - t^3.$$

On appelle P le point où la tangente en M à la trajectoire de M rencontre la droite (D) perpendiculaire à $x'Ox$ au point M_0 de coordonnées (+1 ; 0).
Trouver, à l'instant de date t, les composantes du vecteur vitesse du point M et celles du vecteur vitesse du point P.
Comparer les longueurs de ces deux vecteurs.

☆Problème 30 *./1967/parismelem/pb/texte*

Le plan est rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. La notation $M(x\,;\,y)$ désigne le point M d'abscisse x et d'ordonnée y.
On utilisera le point E(1 ; 0) et E′(−1 ; 0).

1. Étant donné un point $M(x\,;\,y)$ du plan, on appelle M_1 son transformé dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite des ordonnées. Former la relation entre x et y qui équivaut à la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M_1E}$.
   Démontrer que l'ensemble des points M qui satisfont à cette condition est l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ de sommets E et E′.
2. Étant donné deux points $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ de $\mathscr{H}$, distincts ou non, on définit le point $S(X\,;\,Y)$ par :

$$\begin{cases} X = xx' + yy' \\ Y = xy' + x'y. \end{cases}$$

   On dit que S est le « produit » de M par M' et l'on note : $S = M \star M'$.
   On établira alors les propriétés suivantes :

Retour page 1

a) S appartient à $\mathscr{H}$;

b) on a $M\star M' = M'\star M$;

c) étant donné un troisième point quelconque $M''(x'' ; y'')$ de $\mathscr{H}$, on a :

$$(M\star M')\star M'' = M\star(M'\star M'').$$

On calculera ensuite $M\star$E et l'on montrera que pour tout point $M(x ; y)$ de $\mathscr{H}$, il existe un point $\overline{M}$ de $\mathscr{H}$, que l'on précisera, tel que $M\star\overline{M}$ =E. (En résumé, le « produit » noté $\star$ muni $\mathscr{H}$ d'une structure de groupe commutatif.)

3. Étant donné deux points distincts de $\mathscr{H}$, M et M', on pose $S = M\star M'$. Vérifier que S est le point de $\mathscr{H}$ tel que les cordes ES et MM' sont parallèles.
   Que devient ce résultat quand M tend vers M' ?
   Trouver la propriété de la corde $[M, M']$ qui équivaut à S =E'.
   Donner une propriété équivalente faisant intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{M\mathrm{E}}.\overrightarrow{M'\mathrm{E}}$.

4. a) Soit $[A, B]$ et $[C, D]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. On pose $A\star B = P$ et $C\star D = Q$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{P\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{Q\mathrm{E}}$?
   En déduire que le « produit » $A\star B\star C\star D$ est égal à E'.
   Déduire alors du 2 que les cordes $[A, C]$ et $[B, D]$ sont orthogonales, ainsi que les cordes $[A, D]$ et $[B, C]$.

   b) Soit $[A, B]$ et $[A, C]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. Calculer le « produit » $A\star A\star B\star C$.
   Que peut-on dire de la tangente en A à $\mathscr{H}$?
   Démontrer que le cercle de diamètre $[B, C]$ recoupe $\mathscr{H}$ au point A' symétrique de A par rapport à O.

   c) On fixe A de $\mathscr{H}$. On considère les cordes $[A, B]$ et $[A, C]$, qui varient en restant orthogonales. Que dire de la droite (BC) ?

VI. Strasbourg, série C

Ex. 95. ./1967/strasbourgC/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté, on donne un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et les points $A\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. On appelle R_A la rotation de centre A et de mesure $\dfrac{\pi}{6}$ et R_B la rotation de centre B et de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
Quelle est la nature de la composée $R_B\circ R_A$? (On indiquera les éléments caractérisant cette application.)
Démontrer que les transformés respectifs A' et B' des points A et B par $R_B\circ R_A$ appartiennent à la médiatrice du segment $[A, B]$.

Baccalauréat Strasbourg, Juin 1967

Chapitre 8

1968.

Sommaire

I. Algérie, série Mathématiques élémentaires et technique.

Ex. 96. ./1968/algerieelem/exo-1/texte.tex

Le plan E_2 est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$. On définit, dans la suite, certaines applications associant à tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

A) 1. a) Reconnaître l'application définie par :

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y. \end{cases}$$

b) On considère l'application t définie par :

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = -3y. \end{cases} \tag{t}$$

Démontrer que t peut-être considérée de plusieurs manières comme le produit d'une homothétie et d'une symétrie.

2. On considère l'application T définie par :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y. \end{cases} \tag{T}$$

On désigne par z l'affixe du point M et par z' celle de son transformé M' par T.
Prouver que z' peut se mettre sous la forme :

$$z' = \lambda(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)z,$$

où α désigne un nombre réel et λ un nombre réel positif.
Démontrer que T est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. L'application t_1 est définie par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y. \end{cases} \tag{t_1}$$

Démontrer :

a) que t_1 admet une droite de points doubles, Δ, que l'on déterminera ;

b) que t_1 est la symétrie par rapport à Δ.

B) On considère l'ensemble des applications $\mathscr{T}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \tag{$\mathscr{T}$}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels donnés.

1. Démontrer que la composition des applications est une loi interne dans cet ensemble.
2. Á quelle condition une application $\mathscr{T}$ est-elle bijective ?
3. Á quelles conditions une application $\mathscr{T}$ est-elle une isométrie ? Dans ce cas quelle peut-être la nature de $\mathscr{T}$?

Baccalauréat Algérie, Juin 1968

Retour page 1

Chapitre 9

1969.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C & E

Ex. 97. *./1969/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

On considère la transformation T du plan complexe qui, au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' déterminée par

$$z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z - 2\sqrt{3}.$$

Montrer que T est une similitude directe, dont on précisera le centre, ω, l'angle, θ, et le rapport k. Caractériser le triangle formé par le centre, ω, et deux points homologues, M et M'.

Ex. 98. *./1969/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Étudier et représenter graphiquement en axes orthonormés la fonction f définie, pour x réel strictement positif, par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.

Problème 31 *./1969/aixmarseilleC/pb/texte*

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, Ox, Oy, les coordonnées, x, y, d'un point mobile M sont données, à chaque instant t, par
$$x = 1 + 2\cos^2 t,$$
$$y = 2\sin t \cos t.$$
Montrer que la trajectoire de M est un cercle, (Γ), décrit d'un mouvement uniforme. Écrire, en fonction de t, l'équation de la tangente en M à (Γ).
2. On appelle transformé du point $M(x\ ;\ y)$ appartenant à (Γ) le point $M'(X\ ;\ Y)$ défini par les deux conditions suivantes :

   a) OM' est perpendiculaire à la tangente en M à (Γ) ;

   b) le produit scalaire $OM.OM'$ est égal à 3.

   Soit (C) l'ensemble des points M'. Établir que les coordonnées, X, Y, de M' vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} X(2+\cos 2t) + Y\sin 2t = 3, \\ X\sin 2t - Y\cos 2t = 0. \end{cases}$$
   Former une équation cartésienne de (C). Montrer que (C) est une hyperbole.

3. Exprimer les coordonnées, X et Y, de M' en fonction de t. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en M' à (C). Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite OM en un point m ; vérifier que ce point m appartient au cercle (Γ).
4. On donne à t deux valeurs, t_1 et t_2, qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants, M_1 et M_2, sont diamétralement opposés sur (Γ) et que leurs transformés, M_1' et M_2', sont alignés avec O.
   Soit P conjugué harmonique de O par rapport à M_1' et M_2', S l'intersection des tangentes à (C) en ces points. Établir que, lorsque t_1 et t_2 varient $\left(\text{leur différence restant égale à } \frac{\pi}{2}\right)$, P et S se déplacent sur la même droite fixe, (Δ), qui est une droite remarquable pour la courbe (C).
   (On pourra utiliser la résultat établi à la question 3

II. Amiens, série C & E

Ex. 99. ./1969/amiensC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{R}$, des nombres réels l'équation suivante :

$$6(\ln x)^2 - 19\ln x - 7 = 0.$$

On donnera, pour chaque solution, la valeur exacte, puis la valeur approchée avec l'approximation de la tabel des logarithmes.

Ex. 100. ./1969/amiensC/exo-2/texte.tex

On considère le nombre complexe $z = 1 = \mathrm{i}\tan\varphi$ où φ est un nombre réel tel que

$$0 < \varphi < \pi \quad \text{et} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Quel est le module et quel est l'argument du nombre complexe $Z = \frac{z}{1-z}$?

Si Z_1 et Z_2 sont les valeurs correspondants respectivement à $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$, placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points M_1 et M_2 ayant respectivement pour affixe Z_1 et Z_2.

Problème 32 ./1969/amiensC/pb/texte

On considère un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; on appelle $x'x$ et $y'y$ les parallèles menées par O respectivement à $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et (Δ) la droite d'équation $x - y = 0$.

Un point $P(\alpha\ ;\ \alpha)$ de (Δ) se projette orthogonalement en Q sur $y'y$. On considère les points A et B définis par

$$\overrightarrow{PA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PB} = a\vec{\jmath},$$

a étant un nombre réel donné, strictement positif.

1° La perpendiculaire en Q à la droite BQ coupe la droite PB en N et la perpendiculaire en A à la droite AN coupe la droite PB en M. Calculer en fonction de α et a, les coordonnées x et y, de M et en déduire qu'elles satisfont la relation

$$y = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

2° On appelle (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a qui, à la variable réelle x, fait correspondre

$$f_a(x) = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

Étudier les variations de f_a.

Tracer la courbe (C_1) correspondant à la valeur 1 du paramètre a.

Montrer que (C_a) se déduit de (C_1) par une homothétie de centre O. Quel est, lorsque a varie, l'ensemble des points des courbes (C_a) où la tangente est parallèle à $x'x$?

Dans la suite du problème on suppose $a = 1$.

3° Soit $M(x_0\ ;\ y_0)$ un point de (C_1) ; la tangente en M à (C_1) recoupe $y'y$ en H, coupe (Δ) en K et recoupe (C_1) en M'. Montre que l'on a, quel que soit la position de M sur (C_1), $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{M'H}$ et que le rapport $\dfrac{\overrightarrow{MH}}{\overrightarrow{MK}}$ est une constante, que l'on calculera.

4° Quelle est l'aire de la surface comprise entre (Δ), la courbe (C_1) et les parallèles à $y'y$ d'équations

$$x=1 \quad \text{et} \quad x=b\ (b>1)\ ?$$

Cette aire admet-elle une limite lorsque $b\to+\infty$?

III. Amiens remplacement, série C

Ex. 101. ./1969/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble GC, des nombres complexes, l'équation

$$Z^2-4(6+\mathrm{i})Z+3(63+16\mathrm{i})=0.$$

Ex. 102. ./1969/amiensCrem/exo-2/texte.tex

O et O' étant deux points distincts du plan, on désigne par S la similitude de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2, par S' la similitude de centre O', d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

On fait la transformation S d'abord, S' ensuite ; déterminer la transformation produit T=S' $\circ$ S (on montrera qu'il admet un point double, que l'on construira).

☆Problème 33 ./1969/amiensCrem/pb/texte

Le plan E_2 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On désigne respectivement par $x'x$ et $y'y$ la droite des abscisses et la droite des ordonnées de ce repère. On donne les points fixes A, de coordonnées $(a\ ;\ -a)$, et B, de coordonnées $(a\ ;\ a)$, a étant un nombre donné strictement positif. Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur le plan E_2 par :

$$m(x\ ;\ y)\mathscr{R}M(X\ ;\ Y)\Longleftrightarrow 2a\overrightarrow{Mm}+(x-y)\overrightarrow{MA}+(x+y)\overrightarrow{MB}=\vec{0}.$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points m pour lesquels il existe un point M, et un seul, tel que $m\mathscr{R}M$.
On désigne par **T** l'application qui, à tout point m appartenant à $\mathscr{D}$, fait correspondre le point M tel que $m\mathscr{R}M$.
Calculer les coordonnées, X et Y, de M en fonction de celles, x et y, de m. Vérifier que l'on a la relation :

$$\overrightarrow{OM}=\frac{2a}{x+a}\overrightarrow{Om}.$$

Déterminer l'image $\mathbf{T}(\mathscr{D})$ de $\mathscr{D}$ par **T**.
Quel est le transformé par **T** d'un point m de la droite $y'y$?

2° Démontrer que la figure transformée par **T** d'une droite δ d'équation :

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0,$$

est incluse dans une droite Δ, dont on donnera l'équation.
Comment faut-il choisir δ pour sue les droites δ et Δ soient :

a) égales ?

b) strictement parallèles ?

c) concourantes ?
Dans ce dernier cas, démontrer que δ et Δ se coupent sur une droite fixe et donner alors une construction géométrique de Δ connaissant δ. En déduire une construction du point M connaissant m.

3° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{Om}.\overrightarrow{OM}$ en fonction de a, x et y. Comment faut-il choisir le nombre réel k pour qu'il existe des points m tels que :

$$\overrightarrow{Om}.\overrightarrow{OM}=k\ ?$$

Retour page 1

4° Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. Démontrer que la figure transformée de $\mathscr{C}$ par T est incluse dans une conique $\mathscr{C}'$ admettant la droite $x'x$ comme axe de symétrie.
Discuter, suivant la valeur de R, la nature de $\mathscr{C}'$.
Pouvait-on prévoir géométriquement le résultat ?
Construire $\mathscr{C}'$ dans le cas où $R = \frac{a}{2}$. Déterminer en particulier les sommets de $\mathscr{C}'$ est ses points d'intersection avec $y'y$.

IV. Dijon, série C

Ex. 103. ./1969/dijonC/exo-1/texte.tex

Étudier la fonction $y = \ln\cos x$.
Tracer le courbe représentative de cette fonction.

Ex. 104. ./1969/dijonC/exo-2/texte.tex

Déterminer un nombre n de quatre chiffres, tel que les restes des divisions de 21 685 et 33 509 par n soient respectivement 37 et 53.

☆Problème 34 ./1969/dijonC/pb/texte

On donne dans un plan, un cercle (Γ) de centre O fixe, un point fixe I, sur Γ et une droite (D) ne rencontrant pas (Γ).
On définit sur l'ensemble des points de (Γ) une loi de composition interne de la manière suivante.
Soit B et C deux points de (Γ). La droite BC [qui est tangente à BC si B et C sont confondus] ou bien coupe la droite (D) en a, ou bien est parallèle à (D). Appelons δ dans le premier cas la droite aI, dans le deuxième cas la parallèle à (D) menée par I.
Le composé de B et de C, noté $\mathrm{B} \star \mathrm{C}$, est alors le deuxième point d'intersection de (Γ) avec δ [si δ est tangente à Γ en I, ce point est confondu avec I].

A) 1° Montrer que, quels que soient les points B et C de (Γ), on a

$$\mathrm{B} \star \mathrm{C} = \mathrm{C} \star \mathrm{B}.$$

2° Si B est un point quelconque de (Γ), déterminer la composée $\mathrm{B} \star \mathrm{I}$. Que peut-on dire du point I vis-à-vis de cette loi de composition ?

3° Si A est un point quelconque de (Γ), montrer qu'il existe deux points distincts de (Γ) solutions de l'équation

$$\mathrm{X}^2 \star \mathrm{A},$$

où X est un point inconnu et où X^2 désigne la composée $\mathrm{X} \star \mathrm{X}$.

4° Montrer que, quels que soient les points A et B de (Γ), il existe un point X unique de (Γ) tel que l'on ait

$$\mathrm{B} \star \mathrm{X} = A\,; \tag{1}$$

en particulier on notera B^{-1} le point de (Γ) tel que

$$\mathrm{B} \star \mathrm{B}^{-1} = I.$$

Dans le cas où A et B sont quelconques, peut-on déterminer le point X qui vérifie (1), à partir de B^{-1} et de A ?
`N.B.-` les parties B et C sont indépendantes.

B) Soit P et Q les points de Poncelet du faisceau défini par (D) et (Γ).
Soit B et C, deux points de (Γ) et $\mathrm{A}' = \mathrm{B} \star \mathrm{C}$.
Soit B_1, C_1, A'_1, I_1 et Q_1 les transformés des points B, C, A', I et Q, respectivement, dans l'inversion $\mathscr{J}$ de pôle P et de puissance k^2 (k réel non nul).

1° Montrer que

$$(\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1}, \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{B}_1}) + (\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1}, \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{C}_1}) = (\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1}, \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{A}'_1}) \pmod{2\pi}.$$

2° Soit G l'ensemble des nombres complexes de module 1.

a) Montrer que G est un groupe pour la loi « multiplication de deux nombres complexes ».

b) On considère un repère orthonormé $(Q_1, \vec{i}, \vec{j})$, d'origine Q_1, où $\vec{i} = \overrightarrow{Q_1I_1}$.
Si M est un point de (Γ), on désigne par M_1 le transformé de M dans l'inversion $\mathscr{J}$ et par z le nombre complexe dont l'image est M_1 dans le repère considéré.
Montrer que z appartient à G et que l'application φ de (Γ) dans G qui à M associe $\varphi(M) = z$ est bijective.

3° Montrer que, si B et C sont deux points quelconques de (Γ), on a

$$\varphi(\mathrm{B} \star \mathrm{C}) = \varphi(\mathrm{B}) \star \varphi(\mathrm{C}).$$

En déduire que l'ensemble (Γ), muni de la loi $\star$, est un groupe.

C) Il résulte de la partie A) que la loi $\star$ est une loi associative sur (Γ), c'est-à-dire que, pour tout A, pour tout B, pour tout C, l'égalité

$$\mathrm{A} \star (\mathrm{B} \star \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \star \mathrm{C}. \tag{2}$$

est vraie.
Le but de cette partie est de faire établir cette égalité (2), non pour toutes les positions de A, B et C, mais en « en général », c'est-à-dire suivant certaines conditions, qu'on précisera.
On posera

$$\mathrm{B} \star \mathrm{C} = \mathrm{A}' \qquad \mathrm{A} \star \mathrm{B} = \mathrm{C}'.$$

1° ***Lemme :***
Soit (L) et (L') deux cercles sécants en S et T. Une droite passant par S coupe (L) en P et (L') en P' ; une droite passant par T coupe (L) en Q et (L') en Q'.
Montrer que les droites PQ et $P'Q'$ sont parallèles.

2° On suppose que les points A, B et C vérifient les conditions suivantes :

- chacun d'eux est distinct de I ;
- A est distinct de C ;
- la droite BC coupe (D) en a ;
- la droite AB coupe (D) en c.

Montrer que les points a, B et I sont distincts et non alignés.
On désigne par (Γ') le cercle circonscrit au triangle aBI. (Γ') recoupe AB en α, IC' en γ et (D) en a'.

3° On suppose en outre que a' est distinct de c.
Montrer que les points a, γ et α sont distincts.
Montrer que les droites AA' et CC' ne sont pas parallèles ; on désigne par ω leur point de rencontre.
Montrer que les deux triangles $a\gamma\alpha$ et ωC'A sont homothétiques. (On pourra utiliser le lemme.)
En déduire (dans les conditions envisagées) l'égalité (2).

V. Limoges, série C

Ex. 105. ./1969/limogesC/exo-1/texte.tex

En représentant par a un élément de l'ensemble, $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs et par α un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$, des nombres rationnels, on désigne par $x = (a, \alpha)$ un élément du produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.
Soit $x = (a, \alpha)$ et $y = (b, \beta)$ deux éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$; on définit les deux lois suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{loi } \star : & x \star y = (a+b, \ \alpha\beta) ; \\ \text{loi T} : & x \mathrm{T} y = (ab, \ \alpha+\beta). \end{array}$$

Montrer que chacune de ces lois est commutative, associative et possède un élément neutre. Déterminer, pour chacune d'elles, l'ensemble des éléments ayant un symétrique.
La loi T est-elle distributive par rapport à la loi $\star$?

✻ Ex. 106. ./1969/limogesC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction définie par

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}.$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Étudier les branches infinies de sa représentation graphique ; donner les équations des asymptotes. (On ne demande pas la représentation graphique de la fonction.)

VI. Nantes remplacement, série C

✻ Ex. 107. ./1969/nantesCrem/exo-1/texte.tex

Étudier la fonction définie par $y = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

✻ Ex. 108. ./1969/nantesCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère le point M_1, dont les coordonnées sont définies en fonction du temps par :

$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t,$$

et le point M_2 dont les coordonnées sont définies par :

$$x = a\cos 2t \qquad y = -a\sin 2t.$$

a) Quelles sont les trajectoires des points M_1 et M_2 ?

b) Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right)$. Á quelles dates les points M, M_1, M_2 sont-ils confondus ?

c) Démontrer que M est un point du segment $[M_1M_2]$, quand ce segment est défini.
Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point M. Démontrer que les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

✰Problème 35 ./1969/nantesCrem/pb/texte

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère la parabole (P) ayant pour équation $y^2 - 2px = 0$ $(p > 0)$.
Á chaque point M de (P), autre que O, on associe le cercle (C) ayant pour centre le point d'intersection, C, de Ox et de la normale à (P) en M (c'est à dire la perpendiculaire en M à la tangente) et ayant pour rayon $r = CM$.

1. Calculer l'abscisse, λ, du centre, C, du cercle (C) correspondant au point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ de (P). Démontrer que ce cercle a pour équation
$$x^2 + y^2 - 2(x_0 + p)x + x_0^2 = 0.$$
Écrire l'équation de ce cercle en prenant pour paramètre, l'abscisse, λ, de C.
Quel est l'ensemble des points C et quel est l'ensemble des valeurs de r correspondant à l'ensemble des points M de (P) ? Est-il possible d'envisager M confondu avec O ?
2. Discuter le nombres de cercles (C) passant par un point donné P$(\alpha\ ;\ \beta)$, suivant la position de ce point dans le plan : on aura à faire intervenir la parabole (P) et le cercle (C$_0$) correspondant à $x_0 = 0$.
3. Soit Q et Q' les extrémités du diamètre de (C) perpendiculaire à Ox : démontrer que les points Q et Q' appartiennent à une parabole (Γ) qui se déduit de (P) par une transformation, que l'on précisera. Définir avec précision l'ensemble des points Q et Q'.
4. Soit R et R' les points de (C) où la tangente a une direction donnée non perpendiculaire à Ox, de pente m. Démontrer que R et R' appartiennent à une parabole (Γ_m), dont on écrira l'équation ; examiner le cas où m est nul.
Définir avec précision l'ensemble des points R et R'.

Retour page 1

VII. Paris, série C

✻ Ex. 109. ./1969/parisC/exo-1/texte.tex

Soit (C) l'hyperbole représentée, dans un repère d'axes orthonormé par Ox et Oy, par l'équation

$$y^2 = 3x^2 - 12x + 9.$$

Déterminer le centre de symétrie de (C) (par ses coordonnées) et les asymptotes de (C) (par leurs équations). Dessiner (C) et ses asymptotes.

✻ Ex. 110. ./1969/parisC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction qui à x fait correspondre

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 3}{x},$$

x décrivant l'intervalle fermé $[+1\,;+3]$.

a) Déterminer la primitive, F, de f qui s'annule pour $x = 2$. Dans la suite, on pourra désigner par a et b respectivement les nombres $F(1)$ et $F(3)$ (qu'on ne demande pas de calculer).

b) Montrer en énonçant avec précision le théorème utilisé, que cette fonction F de le variable x, x décrivant l'intervalle $[+1\,;+3]$, admet une fonction réciproque, G, définie sur un intervalle que l'on précisera. Démontrer que la valeur 0 appartient à cet intervalle.
   Déterminer, pour la valeur 0 de la variable, la valeur de la fonction G et la valeur de sa dérivée.

VIII. Paris remplacement, série C

✻ Ex. 111. ./1969/parisCrem/exo-1/texte.tex

Les nombres a, b, c sont des nombres entiers appartenant à l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. On représente par $\overline{abc}$ le nombre $5^2a + 5b + c$.

1° Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 4 si, et seulement si, $a + b + c$ est divisible par 4.

2° Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, $a - b + c$ est divisible par 6.

✻ Ex. 112. ./1969/parisCrem/exo-2/texte.tex

Un point mobile M dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé a pour coordonnées à l'instant t

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^4}{4} - \log t, \end{cases}$$

log désignant le logarithme népérien.

1° Construire la trajectoire, (C), du point M. Calculer la longueur du vecteur vitesse du point M à l'instant t.

2° On oriente (C) dans le sens des t croissants et l'on prend pour origine des arcs la position du point mobile à l'instant $t = 1$.
   Déterminer la loi horaire du mouvement, donnant l'arc en fonction du temps.

✩Problème 36 ./1969/parisCrem/pb/texte

1. a) Démontrer que toute équation du 4e degré en X, à coefficients réels, dont on a rendu le coefficient de X^4 égal à 1 :

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{1}$$

peut être ramenée, par changement d'inconnue de la forme $X = \alpha + x$, à une équation de la forme :

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2}$$

b) Démontrer que l'équation (2) peut se mettre d'une infinité de façons, sous la forme :

$$T^2 + T' = 0, \tag{3}$$

T et T' étant deux polynômes du second degré en x, T étant nécessairement de la forme : $T = x^2 + \beta$. 5on posera $T' = ux^2 + vx + w$ et l'on calculera u, v et w en fonction de a, b, c et β.)

c) Démontrer que le polynôme T' peut être mis sous la forme $T' = u(x+\gamma)^2$ pourvu que β soit solution d'une équation du 3^e degré définie par $\varphi(\beta) = 0$ que l'on formera.

En déduire que, si l'on peut trouver une solution de l'équation $\varphi(\beta) = 0$, on peut résoudre l'équation (1). (On rappelle que l'on peut factoriser, c'est à dire décomposer en un produit de facteurs l'expression $M^2 + N^2$, en écrivant :

$$(M + \mathrm{i}N)(M - \mathrm{i}N).)$$

Cette méthode a été inventée par le mathématicien bolonais Ferrari (1522-1565) et ramène ainsi la résolution d'une équation de 4^e degré à celle d'une équation du 3^e degré.

2. Appliquer ce qui précède à l'équation définie par :

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0. \tag{4}$$

Calculer, dans ce cas particulier, les solutions de l'équation définie par $\varphi(\beta) = 0$ (l'une des solutions est 1).

En déduire trois factorisations du polynôme $f(x)$ en un produit de deux trinômes à coefficients réels ou complexes, et la résolution de l'équation (4).

Représenter les images des solutions dans le plan complexe. Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

3. Résoudre l'équation définie par :

$$F(x) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8 = 0. \tag{5}$$

Quels sont les modules et les arguments des solutions ? Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

Factoriser $F(X)$ sur le corps des réels.

IX. Paris, série E

Ex. 113. ./1969/parisE/exo-1/texte.tex

Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre positif a, le système

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x.\mathrm{e}^y = a^2 \\ xy = 1, \end{cases}$$

où les deux inconnues x, y sont des nombres réels et où e désigne la base des logarithmes népériens.

Ex. 114. ./1969/parisE/exo-2/texte.tex

Á tout nombre complexe $z = x + \ icy$ on fait correspondre, dans le plan (P) rapporté à une repère d'axes orthonormé Ox, Oy, le point M de coordonnées x, y. On dit que M est l'image de z ; z est dit affixe de M.

a) Trouver et construire dans le plan (P) l'ensemble, (H), des points M dont l'affixe z vérifie la relation

$$z^2 + (\overline{z})^2 = 1, \tag{1}$$

$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de z.

b) Calculer les arguments des nombres z de module 1 qui satisfont à (1) et situer sur (H) les images de ces nombres.

Retour page 1

✩Problème 37

./1969/parisE/pb/texte

L'espace est rapporté, à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, Oz.
Soit (D) la droite qui passe par les points A, de coordonnées (+1 ; +1 ; +0), et B, de coordonnées (+2 ; +2 ; +4).
Soit (Δ) la droite qui passe par les points I, de coordonnées (+4 ; 0 ; 0), et J, de coordonnées (0 ; +4 ; 0).

1° Montrer que les droites (D) et (δ) sont orthogonales.

2° Á tout point M de la droite (D) on associe la point du plan $\varphi(M)$ passant par (Δ) et par M.

On pose $\dfrac{\overline{M\mathrm{A}}}{\overline{M\mathrm{B}}} = \lambda$, quand M est différent de B.

a) Déterminer en fonction de λ les coordonnées de M et de l'équation de $\varphi(M)$.

b) Quelle est l'équation du plan $\varphi(H)$ perpendiculaire à la droite (D) ?

3° Les plans xOy et yOz étant respectivement choisis pour plan horizontal et plan frontal de projection, l'unité étant prise égale à 2 cm environ, on demande :

a) de faire l'épure des droites (D) et (Δ),

b) de déterminer le plan $\varphi(H)$ par ses traces (c'est-à-dire ses intersections avec la plan horizontal et le plan frontal de projection),

c) de déterminer le point H par ses projections.

4° Soit δ la distance à l'origine, O, au plan $\varphi(M)$.

a) Montrer que

$$\delta^2 = \frac{64\lambda^2}{8\lambda^2+1}.$$

b) Étudier la variation de δ en fonction de λ et représenter graphiquement cette fonction.

c) Déterminer λ pour que le plan $\varphi(M)$ correspondant soit tangent à la sphère d'équation

$$9(x^2+y^2+z^2)-64=0.$$

Retour page 1

Chapitre 10

1970.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C & E

Ex. 115. ./1970/aixmarseilleCE/exo-1/texte.tex

On donne ABCD un carré dans le plan. Le point M étant un point variable de la diagonale AC (entre A et C), on construit le cercle (α) tangent à AD en A et passant par M, ainsi que le cercle (γ) tangent à CD en C et passant aussi par M.
Ces deux cercles ont un point commun, P, autre que M.
Montrer que l'axe radical de (α) et de (γ) passe par un point fixe.
trouver l'ensemble des points P quand M parcourt la diagonale AC.

Ex. 116. ./1970/aixmarseilleCE/exo-2/texte.tex

Les entiers sont écrits ici en base dix.
En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier positif n

$$10^{3n} \equiv 1\ [37].$$

En déduire le reste de la division par 37 du nombre $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

Problème 38 ./1970/aixmarseilleCE/pb/texte

Dans tout le problème, m est un paramètre strictement positif.

1° Soit φ_m la fonction définie, pour $x > 0$, par la formule

$$\varphi_m(x) = x^2 + m \ln x.$$

Déduire des variations de φ_m que cette fonction s'annule pour une et une seule valeur, α_m, qui est comprise entre 0 et 1. (On ne cherchera pas à calculer α_m.)

2° Soit f_m la fonction définie, pour $x \geqslant 0$, par la formule

$$f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}(1 + \ln x).$$

Étudier les variations de f_m.
Montrer que les courbes (C_m) représentatives des f_m dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont l'une, (D), n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Préciser $(D) \cap (C_m)$ et la position de (C_m) par rapport à (D).
Construire (C_1). (On montrera, à cet occasion, que $\frac{1}{e} < \alpha_1 < 1$.)

3° Montrer que (C_m) est transformée de (C_1) par une transformation géométrique très simple, à préciser, A_m.
Discuter le nombre de courbes (C_m) passant par un point P, du plan, selon la position de P dans le plan.

II. Amiens, série C & E

Ex. 117. ./1970/amiensCE/exo-1/texte.tex

Un nombre complexe étant désigné par z, on note $\overline{z}$ son conjugué et $|z|$ son module.
Quel est l'ensemble des points du plan dont l'affixe, z, satisfait à la relation

$$z + \overline{z} = |z|.$$

Représenter cet ensemble.

Ex. 118. ./1970/amiensCE/exo-2/texte.tex

Étude de la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{|x-1|}.$$

Construire la représentation graphique dans un repère orthonormé.

III. Besançon, série C & E

Ex. 119. ./1970/besançonC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe, z, de module 1, d'argument α dont une détermination α_0 est telle que $-\pi \leqslant \alpha_0 < \pi$.

a) Calculer, en fonction de α, le module et l'argument du nombre complexe

$$Z = 1 + z + z^2.$$

b) On considère un deuxième nombre complexe, z' de module 1, d'argument β. Dans le cas où il est défini, montrer que le nombre complexe $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

Ex. 120. ./1970/besançonC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction f, de la variable réelle x, définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

1° Étudier son domaine de définition. Montrer qu'elle est périodique de période π et étudier ses variations dans l'intervalle] ; [

IV. Bordeaux, série C

Ex. 121. ./1970/bordeauxC/exo-1/texte.tex

$\mathbb{N}$ désignant un entier naturel non nul, on considère les entiers de la forme $N^4 + 4$.

1° Décomposer, dans le corps des réels, le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré. En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$.

2° Montrer que, si N n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

Retour page 1

✻ Ex. 122. ./1970/bordeauxC/exo-2/texte.tex

On considère quatre points distincts A, B, C et D alignés sur une droite (Δ) et un point M extérieur à (Δ) tel que

$$(MA, MB) = (MC, MD) \pmod{\pi}.$$

Montrer que les cercles MAB et MCD se correspondent dans une translation de vecteur parallèle à (Δ) ou dans une homothétie dont le centre est situé sur (Δ)

✫Problème 39 ./1970/bordeauxC/pb/texte

On suppose qu'il existe une fonction continue unique f définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N}, \\ f(x+y) + x + y = [f(x)+x][f(y)+y] \end{cases} \tag{1}$$

et

$$f(1) = \mathrm{e} - 1 \quad (\mathrm{e} : \text{base des logarithmes népériens}). \tag{2}$$

1° En posant $x = y = \dfrac{t}{2}$, vérifier que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \\ f(t) + t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

et montrer que, s'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) + x_0 = 0,$$

alors

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x) + x \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

En déduire, par la considération de (2), que $f(x) + x$ n'est jamais nul et établir que $f(0) = 1$.

2° Montrer que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f(nx) = [f(x)+x]^n - nx. \end{cases} \tag{5}$$

Posant $y = -x$ dans (1), calculer $f(-x) - x$ et établir que (5) reste vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3° Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier q, l'expression

$$f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}.$$

Montrer, en utilisant (5), que l'on a

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q} (\mathbb{Q} \ : \ \text{ensemble des rationnels}) \\ f(x) = \mathrm{e}^x - x. \end{cases} \tag{6}$$

4° On admet, dans la suite, que la fonction f ainsi déterminée sur les rationnels est encore définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (on vérifiera que (1) a lieu).

a) Trouver, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1$. En déduire, dans les mêmes conditions, les limites de f(x). Étudier et représenter graphiquement les variations de f, en soignant particulièrement l'étude des branches infinies.

Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative au point $x = 1$?

b) Évaluer l'aire, $A(X)$, de la portion de plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droites d'équations $= 0$ et $x = X$ $(X < 0)$. Que peut-on dire de $A(X)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

Retour page 1

5° a) Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \\ 1 + x \leqslant e^x \end{cases} \tag{7}$$

b) On pose

$$P_n(a) = (1+a)(1+a^2)\dots(1+an), \text{ pour } a > 0.$$

Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de n satisfaisant

$$0 < P_n(a) < e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} \quad (n \geqslant 0). \tag{8}$$

Montrer enfin que, pour $0 < a < 1$, il existe des nombres M dépendant de a vérifiant

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \\ P_n(a) > M.. \end{cases} \tag{9}$$

Préciser, en fonction de a, une valeur possible de M.

N.B.- les questions 4 et 5a sont indépendantes des questions précédentes.

V. Bordeaux, série E

Ex. 123. ./1970/bordeauxE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 3\sin x, \tag{1}$$

où y est la fonction inconnue.

On pose $y = u + \alpha \sin x$, où u est une nouvelle fonction inconnue et α une constante réelle.

a) Pour quelle valeur de α la fonction u vérifie-t-elle l'équation différentielle

$$u'' + 4u = 0, \tag{2}$$

lorsque y vérifie (1) ?

b) Quelle est la solution générale de (2) ? En déduire toutes les solutions de (1).

c) Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution de (1) vérifiant les conditions

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad y'(\pi) = 0.$$

Déterminer cette solution.

Ex. 124. ./1970/bordeauxE/exo-2/texte.tex

Dans un repère orthonormé, les droites (D) et (D') admettent les représentations paramétriques suivantes :

$$(D) \quad x = 1 + \lambda, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,;$$
$$(D') \quad x = 2\mu, \quad y = 1, \quad z = -2\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminer $A \in$(D) et $B \in (D')$ tels que la distance AB soit minimale.

☆Problème 40 ./1970/bordeauxE/pb/texte

Sujet identique à celui de la série C Problème C 1970

Retour page 1

VI. Lille, série C

❊ Ex. 125. ./1970/lilleC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$(1-\mathrm{i})x^2 - 2x - (11+3\mathrm{i}) = 0.$$

❊ Ex. 126. ./1970/lilleC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction

$$x \longmapsto \frac{1+\ln x}{x},$$

où la notation $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

Étudier ses variations et construire avec précision sa représentation graphique (C) (le repère d'axe $x'Ox$, $y'Oy$ sera choisi orthonormé, l'unité mesurant 4 cm). On déterminera en particulier les points suivants :

- M_1, d'abscisse x_1, intersection de C et de l'axe $x'x$,
- M_2, d'abscisse x_2, point en lequel la tangente passe par l'origine,
- M_3, d'abscisse x_3, point en lequel la tangente est parallèle à l'axe $x'x$,
- M_4, d'abscisse x_4, point en lequel la dérivée seconde s'annule.

Vérifier que les quatre nombres x_1, x_2, x_3 et x_4 constituent une progression géométrique.

☆Problème 41 ./1970/lilleC/pb/texte

On considère un triangle MAB, et H désigne le pied sur AB de la hauteur issue de M, on appelle P et Q les pieds des perpendiculaires menées de H sur les droites MA et MB.

A) 1. Montrer que les quatre points A, B, P et Q sont sur un même cercle, (C), et que le point M a la même puissance par rapport au cercle (C) et au cercle de centre O milieu de AB passant par H.
Déterminer l'axe radical de ces deux cercles.

2. La lettre C désignant le centre du cercle (C), établir la relation

$$\overline{\mathrm{HA}}.\overline{\mathrm{HB}} = 2\overline{\mathrm{OC}}.\overline{\mathrm{HM}}. \tag{1}$$

B) La figure précédente est étudiée dans un repère orthonormé associé aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ contenant les points A et B, dont les coordonnées sont ainsi A$(0\ ;\ a)$ et B$(0\ ;\ -a)$, a désignant un nombre positif donné.
On désigne par $(x_0\ ;\ y_0)$ les coordonnées de M $(x_0 \neq 0)$.

1. En utilisant la relation (1), écrire l'équation du cercle (C), puis l'équation de cercle de diamètre HM ; en déduire que l'équation de la droite PQ est :

$$(x_0^2 - y_0^2 + a^2)x + 2x_0y_0y - x_0(y_0^2 + a^2) = 0.$$

(On pourra utiliser le fait que PQ est axe radical de ces deux cercles.)

2. En déduire l'ensemble des points M pour lesquels la droite PQ est parallèle à l'axe $x'x$.

3. On donne K$\left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\right)$ et l'on impose à la droite PQ de passer par ce point K.

a) Écrire l'équation de la courbe (E), ensemble des points M correspondants.

b) Étudier les variations et le représentations graphique de la fonction f

$$x \overset{f}{\mapsto} y = f(x) = \sqrt{a}\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}}.$$

c) En déduire la construction de la courbe (E).

d) On se propose de calculer l'intégrale

$$\int_l^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Retour page 1

où l est un nombre donné tel que $-\frac{a}{2} < l < a$.

On montrera pour cela qu'il existe deux nombres réels constants, α et β, tels que

$$\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}} = \alpha\sqrt{2x+a} + \frac{\beta}{\sqrt{2x+a}}.$$

En déduire que l'aire du domaine compris entre la courbe (E), l'asymptote de cette courbe et son point double $(x = a)$ a une valeur finie, que l'on calculera.

VII. Lille série E

✻ Ex. 127. ./1970/lilleE/exo/texte.tex

Mêmes sujets que pour la série C.

Une modification est toutefois à faire dans le texte dans la question A2, qu'il faut remplacer par le texte suivant :

2. On appelle A' l'intersection de HP et de la perpendiculaire en B à AB et B' l'intersection de HQ et de la perpendiculaire en A à AB. Quelle est la nature du quadrilatère ABA'B' ?

   On appelle h l'intersection des droites HM et A'B'.

   En évaluant la puissance de H par rapport au cercle de diamètre MA' montrer que l'on a

$$\overline{\mathrm{HP}}.\overline{\mathrm{HA'}} = 2\overline{\mathrm{Hh}}.\overline{\mathrm{HM}}.$$

   En déduire que l'on a

$$\overline{\mathrm{HA}}.\overline{\mathrm{HB}} = 2\overline{\mathrm{OC}}.\overline{\mathrm{HM}}. \qquad (1)$$

VIII. Paris, série C

✻ Ex. 128. ./1970/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, on appelle image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le point M dont les coordonnées sont $(x\ ;\ y)$; le nombre z est dit affixe de M.

On considère les deux points A et B, d'affixes respectives $1 - \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Calculer les affixes des points C pour lesquels le triangle ABC est

a) rectangle isocèle, l'angle droit étant en B (deux cas possibles) ;

b) rectangle isocèle, l'angle droit étant en C (deux cas possibles).

✻ Ex. 129. ./1970/parisC/exo-2/texte.tex

On considère E= $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; ses éléments sont les couples $(a,\ b)$, où a et b sont des *entiers relatifs*. On munit l'ensemble E de la loi, notée $\star$, définie par

$$(a,\ b)\star(a',\ b') = (aa',\ ab' + a'b).$$

1. La loi $\star$ est-elle commutative ; associative ? Montrer qu'il existe un élément neutre et le calculer.
2. Á un élément fixé $(a,\ b)$ de E, on associe l'application $f : E \to E$ définie par

$$(x,\ y) \longmapsto (a,\ b)\star(x,\ y).$$

   Montrer que, si $a \neq 0$, l'application f est injective.

   Montrer que, pour que f soit surjective, il faut et il suffit que $a = 1$ ou $a = -1$.
3. a) On considère l'équation

$$3x + 5y = 1.$$

   Déterminer tous les couples $(x,\ y)$ d'*entiers relatifs* qui sont solutions de cette équation [on pourra remarquer que le couple $(+2, -1)$ est une solution].

   b) On considère l'application $f : E \to E$ associée à l'élément $(a,\ b) = (5,\ 3)$ de E. Pour quelles valeurs de l'entier relatif α l'élément $(\alpha,\ 1)$ de E est-il l'image, par f, d'un élément de E ?

Retour page 1

✰Problème 42

./1970/parisC/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0x,\ Oy)$, on considère l'équation

$$x^2+y^2-2[\ln(-t)]x-2ty+2t=0,$$

où t désigne un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble, A, des valeurs de t pour lesquelles l'équation précédente est celle d'un cercle, noté (C_t). On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles (C_t), lorsque t parcourt A.
2. Montrer que tout cercle (C_t) de $\mathscr{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, (Ω), de centre $\omega(0\ ;\ +1)$, dont on déterminera le rayon.
3. On appelle γ_t le centre du cercle (C_t). C'est la position à l'instant t d'un mobile M (le paramètre t représente le temps, qui varie en croissant dans A).
   Déterminer et dessiner
   a) la trajectoire du mobile M et le sens de son déplacement ;
   b) le vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ de M à l'instant t ;
   c) l'ensemble des points v définis par la relation
   $$\overrightarrow{Ov}=\overrightarrow{MV}\ ;$$
   d) le vecteur accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ de M à l'instant t.
   Indiquer si le mouvement de M sur sa trajectoire est accéléré ou retardé.
4. a) Déterminer l'équation de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, des cercles (C_t) et $(C_{t'})$ $(t\neq t')$.
   Démontrer qi'il existe une position limite, (Δ_t), de cette droite $D_{(t,\ t')}$ lorsque t' tend vers t fixé. Donner l'équation de (Δ_t).
   b) On a ainsi défini une application φ de A dans l'ensemble, $\mathscr{D}$, des droites du plan, qui, à l'élément t de A, fait correspondre la droite $\varphi(t)=\Delta_t$.
   L'application φ est-elle injective ? Préciser l'ensemble des images par φ des éléments t de A.
5. *Solution géométrique de la question* (4) - Á l'aide des propriétés géométriques de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, démontrer à nouveau l'existence de la position limite (Δ_t) lorsque t' tend vers t fixé. Caractériser géométriquement la droite (Δ_t). En déduire les propriétés de l'application φ démontrées dans la question (4).

IX. Paris, série E

❊ Ex. 130.

./1970/parisE/exo-1/texte.tex

On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R}\\ f(x)=x-\cos x.\end{cases}$$

a) Montrer que f est strictement croissante. Montrer que l'équation $x-\cos x=0$ admet une racine, et une seule x_0, et que

$$x_0\in\left]\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$$

.

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $\left]x_0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$, montrer que l'on a

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)f'(c),$$

c étant une valeur de l'intervalle $\left]x_0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que $f'(c)>\frac{3}{2}$.

En déduire

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<x_0<\frac{\pi}{4}.$$

Retour page 1

✼ Ex. 131. ./1970/parisE/exo-2/texte.tex

Développer $(a+b)^7$.
En déduire que, si a et b sont des entiers relatifs, le reste de la division euclidienne par 7 de $(a+b)^7$ est égal au reste de la division euclidienne par 7 de a^7+b^7.
Montrer que, pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, le reste de la division par 7 de n^7 est égale à n [on pourra, lorsque $n \neq 0$, écrire $n = 1+(n-1)$].
Déduire de ce qui précède l'équivalence suivante :

$$(a+b) \text{ multiple de } 7 \Longleftrightarrow (a^7+b^7) \text{ est multiple de } 7.$$

Trouver tous les entiers relatifs x vérifiant

$$\begin{cases} 10 \leqslant x \leqslant 10 \\ x^7+128 \text{ multiple de } 7. \end{cases}$$

X. Poitiers, série C

✼ Ex. 132. ./1970/poitiersC/exo-1/texte.tex

D'après bacc. C, Poitiers, Juin 1970.

Dans tout le problème, on supposera le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.
Soit la transformation ponctuelle $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ qui, à tout point $m(x,\ y)$ du plan, fait correspondre le point $M(X,\ Y)$ dont les coordonnées sont

$$\begin{cases} X = x+a & \text{et} \\ Y = \lambda Y \end{cases}$$

où a et λ sont des réels donnés avec $\lambda \neq 0$.
On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des transformations $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$.

Partie A.

1° Quelle est, dans le plan $\mathscr{P}$, la transformation $\mathrm{U}_a = \mathrm{T}_{(a,\ 1)}$? Montrer que l'ensemble $\mathscr{U}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

2° Quelle est, dans le plan $\mathscr{P}$, la transformation $\mathrm{V}_\lambda = \mathrm{T}_{(0,\ \lambda)}$? Montrer que l'ensemble $\mathscr{V}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

3° Montrer que la transformation composée $\mathrm{T}_{(a',\ \lambda')} \circ \mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ appartient à $\mathscr{T}$.

4° Montrer que $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ peut être considérée comme la composée d'une transformation de $\mathscr{U}$ et d'une transformation de $\mathscr{V}$.

Partie B.
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

1° Calculer les dérivées première et seconde de f et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre n.

2° Étudier les variations de la fonction f_n telle que

$$f_n(x) = (x+n)\mathrm{e}^x,$$

où n est un entier relatif donné. Tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

3° Calculer $\mathrm{I}_0(h) = \displaystyle\int_0^h f_0(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_n(h) = \displaystyle\int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de h et établir la relation

$$\mathrm{I}_n(h) = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{I}_0(h). \tag{R}$$

Partie C.
Déterminer a et λ pour que le minimum de $\mathscr{C}_0$ ait pour transformé par $T_{(a,\,\lambda)}$ le minimum de $\mathscr{C}_n$ et montrer que $\mathscr{C}_0$ est transformé en $\mathscr{C}_n$.
Quelle relation existe-t-il entre l'aire du domaine du plan défini par les relations

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

où g est une fonction continue, positive donnée, et l'aire du transformé de ce domaine par $T_{(a,\,\lambda)}$?
Retrouver ainsi la relation R.

Chapitre 11

1971.

Sommaire

I. Abidjan, série C et E

Ex. 133. ./1971/abidjanCE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation différentielle

$$y' + y = 2x.\mathrm{e}^{-x}, \tag{11.1}$$

dans laquelle x est une variable réelle quelconque, y est une fonction inconnue de la variable x (qu'il s'agit précisément de déterminer).

1° Montrer que $y = \mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre (c'est à dire $y' + y = 0$).

2° On pose alors $y = z.\mathrm{e}^{-x}$, définissant ainsi une nouvelle fonction z dont la dérivée est notée z'. Calculer y' en fonction de x, z et z' et former l'équation satisfaite par z' en reportant y' et y dans (11.1).

3° En déduire toutes les solutions de l'équation (11.1). Soit y_1 la solution particulière qui s'annule pour $x = 0$. Construire la représentation graphique de y_1 dans un repère orthonormé.

Ex. 134. ./1971/abidjanCE/exo-2/texte.tex

Soit les deux transformations T_1 et T_2 définies pour tout point du plan par

$$M(x\,;\,y) \overset{\mathrm{T}_1}{\longmapsto} M_1(x_1\,;\,y_1) \quad \text{et} \quad M(x\,;\,y) \overset{\mathrm{T}_2}{\longmapsto} M_2(x_2\,;\,y_2),$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = 1 - y, \\ y_1 = x - 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x - \dfrac{3}{2}, \\ y_2 = 2y + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

1° Montrer que T_1 est une rotation $\mathrm{R}(\omega, \theta)$. (On déterminera ω et θ.)

2° Montrer que T_2 est une homothétie, H, de même centre que la rotation.

3° En déduire $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$. Quelle est la nature de ces transformations ?

☆Problème 43 ./1971/abidjanCE/pb/texte

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par (D) l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples $(x,\ y)$ de nombres réels muni de l'addition et de la multiplication suivantes :

$$(x,\ y) + (x',\ y') = (x + x',\ y + y')$$

et

$$(x,\ y).(x',\ y') = (xx',\ xy' + x'y).$$

A) Prouver que $(D,\ +,\ .)$ est un anneau commutatif, possédant une unité l'élément $(+1,\ 0)$.
Les éléments de (D) seront appelés *nombres duaux*

B) On note (D_1) [respectivement (D_2)] l'ensemble des nombres duaux de la forme $(x,\ 0)$ [respectivement de la forme $(0,\ y)$].

1° Prouver que (D_1) est un sous-anneau de (D).

2° (D_2) est-il un sous-anneau de (D) ?

3° (D) peut-il être un corps ?

4° Prouver que $f : x \longmapsto (x,\ 0)$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur (D_1).

C) L'isomorphisme de la question B4 nous permet, dans la suite du problème, d'identifier (D_1) à $\mathbb{R}$, en posant

$$(x,\ 0) = x$$

pour tout élément $(x,\ 0)$ de (D_1).

1° Prouver que tout nombre dual z peut s'écrire d'un manière, et d'une seule, sous la forme

$$z = x + \epsilon y,$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = (0,\ +1)$.

2° Étudier les puissances ϵ^p de ϵ, $p \in \mathbb{R}^\star$.

3° Calculer z^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

4° Rechercher les éléments inversibles de (D).

D) Soit $z = x + \epsilon y$ un nombre dual. On pose

$$\overline{z} = x - \epsilon y$$

et l'on définit le symbole $|z|$ en posant $|z| = |x|$, où le second membre désigne la valeur absolue du réel x.

1° Prouver que $z.\overline{z} = |x|^2$.

2° Prouver que $\left|z.z'\right| = |z|.\left|z'\right|$.

3° Prouver que $\left|z + z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|$.

E) Soit $z \in (D) - (D_2)$. On pose $\arg(z) = \dfrac{y}{x}$.

Établir que

$$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z'), \quad z \notin (D_2),\ z' \notin (D_2).$$

F) Si f est une fonction réelle d'un variable réelle, dérivable sur $\mathbb{R}$, on la prolonge à (D) en posant, pour tout $z = x+\epsilon y$ de (D),

$$f(z) = f(x) + \epsilon y f'(x).$$

1° Donner les expressions de $\cos z$ et de $\sin z$.

2° Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$.

3° Calculer $\cos(z + z')$.

4° Calculer $\sin(z + z')$.

II. Aix Marseille, série C et E

Ex. 135. ./1971/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Rappeler sans démonstration la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire les limites quand x tend vers $+\infty$ de $x - n\ln x$ et de $\dfrac{x^n}{e^x}$ (n désignant un entier positif fixé).

Retour page 1

✻ Ex. 136. ./1971/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit dans le plan un triangle équilatéral ABC. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ recoupe le cercle circonscrit en D. On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$.
Réduire à une transformation simple le produit

$$S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}.$$

(S_{XY} désigne la symétrie d'axe XY.)

☆**Problème 44** ./1971/aixmarseilleC/pb/texte

`N.B. - Les trois questions sont indépendantes.`
Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
(P) désigne le plan **privé de l'origine**, O, de ce repère.
(E) désigne l'ensemble des triplets (A, B, C) de trois points de (P) dont les affixes a, b et c dans ce repère vérifient la relation $ac = b^2$.

1. B sera dans cette question un point fixe de (P), d'affixe b.
   Montrer qu'à tout point M de (P) peut être associé un point, et un seul, point, M' tel que
   $$(M, B, M') \in (\text{E}),$$
   ce qui définit une transformation T de (P).
   T est-elle involutive ? Quel est l'ensemble de ses points doubles ?
   Calculer le module et l'argument de l'affixe, m', de M' en fonction de ceux de l'affixe m de M. En déduire que T est le produit commutatif d'une symétrie d'axe OB et d'une inversion , que l'on précisera.
2. (F) désigne l'ensemble des triplets (A, B, C) de (E) qui vérifient de plus la relation $a + b + c = 0$.
   a) Si $(A, B, C) \in$(F), montrer que $(B, C, A) \in$(F) et que $(C, A, B) \in$(F).
      Que dire, réciproquement, si
      $$(A, B, C) \in (\text{E}) \qquad \text{et} \qquad (B, C, A) \in (\text{E})?$$
   b) Si $(A, B, C) \in$(F), montrer que a, b et c sont les trois racines d'une équation de la forme
      $$z^3 - k = 0 \quad (k \text{ complexe}).$$
      Étudier la réciproque.
3. A_1 et A_2 étant deux points donnés dans (P), montrer que l'on peut déterminer une suite de points A_n (n entier naturel) telle que l'on ait
   $$(A_1, A_2, A_3) \in (\text{E}), \quad (A_2, A_3, A_4) \in (\text{E}), \ldots, (A_n, A_{n+1}, A_{n+2}) \in (\text{E}), \ldots$$
   Comment A_1 et A_2 doivent-ils être choisis pour que les A_n soient tous distincts ?

III. Amiens, série C et E

✻ Ex. 137. ./1971/amiensC/exo-1/texte.tex

On pose $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2s$ (s réel, e base des logarithmes népériens).

a) Exprimer x en fonction de s.

b) Si $s = 3$, calculer x avec la précision permise par les tables de logarithmes. (On prendra $\sqrt{10} = 3{,}162$.)

✻ Ex. 138. ./1971/amiensC/exo-2/texte.tex

a) Linéariser $\sin^4 x$.

b) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{d}x$.

c) Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

Retour page 1

✩Problème 45

./1971/amiensC/pb/texte

A) Les nombres réels x et x' sont liés par la relation $xx' = -4$.

Soit N et N' les points d'abscisses respectives x et x' sur l'axe $(\overrightarrow{\Delta})$. Calculer en fonction de x la longueur, notée $l(x)$, du segment NN' (l'unité de longueur choisie étant celle choisie sur l'axe). Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto l(x)$ ainsi définie. Tracer son graphe dans un repère orthonormé. Utiliser ce graphe pour discuter de l'existence des points N tels que la longueur ait une valeur donnée, k.

B) On note (P) le plan complexe et (P*) le plan complexe privé du point $O(0\ ;\ 0)$. A tout point $M \in$(P*), image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point $M' \in$(P*), image du nombre complexe $z' = x' = \mathrm{i}y'$ tel que $zz' = 4$.

On note $M(z) \overset{T}{\longmapsto} M'(z')$ la transformation ainsi définie.

1. T est-elle involutive ? Quels sont les points B et B' invariants par T ?
2. a) En étudiant les arguments de z et z', montrer que les demi-droites OM et OM' sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.

   b) En complétant cette étude par celles des modules de z et de z', montrer que T est le produit de deux transformations géométriques simples, que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction de celles x' et y' du point M'.
4. Écrire, quand il existe, l'équation du cercle (Ω), de centre donné $\Omega(0\ ;\ \omega)$, orthogonal au cercle de diamètre BB'. Déterminer le transformé par T de ce cercle (Ω).

   a) analytiquement,

   b) géométriquement.
5. Écrire l'équation du cercle (Γ) passant par B et par B', de centre donné $P(\lambda\ ;\ 0)$. Déterminer le transformé par T du cercle (Γ)

   a) analytiquement,

   b) géométriquement.
6. Conclure de ce qui précède que les points B, B', M et M' sont cocycliques et que, lorsque M décrit le cercle (Γ), la droite MM' passe par un point fixe A, que l'on précisera.
   En déduire une construction géométrique du point M' transformé de M par T, lorsque M n'appartient pas à l'axe $y'Oy$.

IV. Groupe I, série C

✼Ex. 139.

./1971/groupeIC/exo-1/texte.tex

1° Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles $\dfrac{n^2-9}{n^2-5n+4}$ est un entier relatif (positif, négatif ou nul).

2° Quelle est la plus petite valeur, p, positive et entière telle que, quel que soit le réel x supérieur ou égal à p, on ait

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+4} < 2\ ?$$

✼Ex. 140.

./1971/groupeIC/exo-2/texte.tex

1° n désignant un entier naturel, résoudre l'équation

$$u^n = (-1)^n, \qquad \text{(E)}$$

dans le corps des complexes.

On distinguera deux cas, suivant la parité de n et l'on déterminera le module et l'argument de chacune des racines de l'équation.

2° Dans le cas où n est pair, on désigne par u_K l'une quelconque des racines de l'équation (E).

La relation $z' = u_K z$ établit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble de ces applications, muni de l'opération de composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

Retour page 1

✰Problème 46

./1971/groupeIC/pb/texte

On se propose de chercher comment il faut choisir les nombres réels a, b, c pour que l'expression

$$\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}$$

soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à 1, quelle que soit la valeur du nombre réel x,

$$\left|\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}\right| \leqslant 1. \qquad (\mathscr{C})$$

1° Démontrer qu'il est *nécessaire* pour que la condition $(\mathscr{C})$ soit réalisée que l'on ait

$$|a| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |c| \leqslant 1.$$

2° a) On suppose que l'on a $a = 1$; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à b et à c ? Même question lorsque $a = -1$.

b) On suppose maintenant que l'on a

$$-1 < a < +1 \quad \text{(inégalités strictes) ;}$$

démontrer qu'il est *nécessaire* que l'on ait

$$b^2 + 2a^2 \leqslant 2.$$

3° a) En supposant que $b^2 + 2a^2 = 2$ et $-1 < a < +1$, démontrer que, par rapport à un repère cartésien orthonormé d'axes Ox, Oy et Oz, le point P de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ décrit un cercle (Γ), dont on donnera l'équation du plan, les coordonnées du centre et la valeur du rayon.

b) *Application numérique :*

$$a = \cos\varphi, \qquad b = \sin\varphi, \qquad 0 < \phi < \pi.$$

Construire la courbe représentative, en repère orthonormé, de la fonction f, de l variable réelle x, définie par

$$f(x) = \frac{(x^2-1)\cos\varphi + 2x\sin\varphi}{x^2+1}.$$

Préciser les coordonnées des points de cette courbe où la tangente est parallèle à $x'x$.

4° On suppose enfin que l'on a

$$-1 < a < +1 \qquad \text{et} \qquad b^2 + 2a^2 < 2 \quad \text{(inégalités strictes).}$$

On appelle toujours P le point de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans un repère cartésien orthonormé et, bien sûr, on cherche à satisfaire la condition $(\mathscr{C})$.

Démontrer que le point P appartient soit à la surface soit à l'intérieur du cône (Σ) de révolution dont le sommet $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, l'axe AO, le demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ et qu'il appartient aussi soit à la surface, soit à l'intérieur du cône (Σ') symétrique de (Σ) par rapport à O.

V. Groupe I, série E

✳ Ex. 141.

./1971/groupeIE/exo-1/texte.tex

1° Montrer qu'une inversion plane transforme un cercle (C) en un cercle (C') de même rayon si, et seulement si, $k = \pm p$, k étant la puissance d'inversion et p la puissance non nulle du pôle d'inversion par rapport à (C).

2° On donne en géométrie plane, deux cercles (C_1) et (C_2) non concentriques.

On appelle $\mathscr{J}$ toute inversion transformant (C_1) en un cercle (C_1') et (C_2) en un cercle (C_2'), telle qu'il existe au moins un déplacement du plan, $\mathscr{D}$, transformant à la fois (C_1) en (C_1') et (C_2) en (C_2').

Étudier $\mathscr{J}$ et $\mathscr{D}$; trouver l'ensemble des pôles des inversions $\mathscr{J}$.

N.B. – on sera amené à distinguer si (C_1) et (C_2) sont, ou non, orthogonaux.

Retour page 1

✻ Ex. 142. ./1971/groupeIE/exo-2/texte.tex

On appelle tétraèdre (T) tout tétraèdre ABCD tel que BC = AD, CA = BD et AB = CD.
Caractériser le parallélépipède obtenu en menant par chaque arête la plan parallèle à l'arête opposée.
Dans les données de l'épure suivante, il existe deux tétraèdres (T_1) et (T_2) dont une face est ABC ; montrer que les sommets A, B, C et D_1 de (T_1) ont pour projections les sommets de deux rectangles ; en déduire le sommet D_2 de (T_2) ; représenter (T_2), solide et opaque, avec sa ponctuation.
Épure. - Le repère orthonormé a pour origine O le centre de la feuille ; l'axe Ox est debout et orienté vers l'avant, l'axe Oy porte la ligne de terre et est orienté vers la droite, l'axe Oz est vertical et orienté vers le haut ; l'unité de longueur est la centimètre.
Les sommets A, B, C ont pour coordonnées A(+7 ; −4 ; +4), B(+1 ; +5 ; +4) et C(+7 ; +5 ; 0).
L'épure sera faite sur du papier quadrillé au demi-centimètre.

✩Problème 47

./1971/groupeIE/pb/texte

A) On cosnidère les fonctions polynômes de la variable réelle x, définies par

$$x \longmapsto P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a,$$

pour tout choix des réels a et b, $a \neq 0$.
Donner l'expression du polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x) = (x+1)Q(x).$$

On suppose a donné ; déterminer b pour qu'il existe un réel α tel que

$$Q(x) = a(x-\alpha)^2\ ;$$

on trouve ainsi deux polynômes $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$,

$$Q_2(-1) \neq 0.$$

B) Étudier les variations de la fonction f définie, pour $x \neq -1$, par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}.$$

Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (ω), d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, l'unité de longueur étant le centimètre.
Calculer, en centimètres carrés, l'aire, $\mathscr{A}$ de la région fermée du plan limitée par (C), Ox, Oy ; on pourra à cet effet et si on le juge opportun, rapporter d'abord (C) au repère (Ω) déduit de (ω) par la translation de vecteur $(-1\ ;\ 0)$.
On donnera à l'aide des tables, une valeur approchée de $\mathscr{A}$.

C) Un système, S, de numération a pour base l'entier $k \geqslant 4$. On considère les entiers u ayant dans S une représentation figurée de la forme

$$u = \overline{ABBA},$$

pour tout choix des entiers A et B, figurés chacun par un seul chiffre, $\overline{A}$ et $\overline{B}$, $A \neq 0$.
Démontrer que tout u est divisible par $k+1$.
On suppose A donné ; déterminer B afin que u soit divisible par $(k+1)^2$; discuter. Il sera utile ici de poser $k+1 = K$; on démontrera que B est le reste de la division euclidienne de $3A$ par K.
Quelles sont les valeurs de A et de B pour lesquelles u est divisible par $(k+1)^3$?
Exemple. - la base étant dix, écrire sans justification l'ensemble des u divisibles par la carré de onze, préciser le sous-ensemble des u divisible par le cube de onze.

VI. Lille, série C & E

Retour page 1

✻Ex. 143. ./1971/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

1° Étudier les variations de la fonctions f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'unité de longueur étant prise égale à 2 centimètres.

2° Calculer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses la courbe et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\lambda+1$ $(\lambda>1)$.

Cette aire admet-elle une limite lorsque $\lambda\to+\infty$?

✻Ex. 144. ./1971/lilleC/exo-2/texte.tex

Soit un triangle ABC de côtés $AB=4a$, $AC=5a$ et $BC=7a$ (a : longueur donnée).

1° M étant un point quelconque de l'espace, donner l'expression plus simple du vecteur

$$\vec{V}_1 = 7\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$$

en utilisant la notion de barycentre.

2° Que peut-on dire du vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ quand le point M varie ? Soit $\vec{V}_2$ ce vecteur.

3° Déterminer l'ensemble des points, M, de l'espace tels que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ aient le même module.

✩Problème 48 ./1971/lilleC/pb/texte

1° Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, on considère les cercles (C_1) et (C_2) d'équations respectives

$$x^2+y^2-2x+2y\frac{\sqrt{3}}{3}=0$$

et

$$x^2+y^2-2x+2y\sqrt{3}=0.$$

Préciser leurs centres et leurs rayons.

Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2) ?

2° A tout point M de coordonnées x et y, par rapport au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, est associé son affixe

$$z = x+\mathrm{i}y.$$

On considère la similitude directe (S_0) de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Quel est le transformé du cercle (C_1) dans cette similitude ?

On désigne par z' l'affixe de M' homologue de M dans cette similitude. Exprimer z' en fonction de z.

A étant le point (autre que O) commun aux deux cercles (C_1) et (C_2), montrer que les points M, M' et A sont alignés.

3° Calculer en fonction de z l'affixe ω du point Ω du plan, tel que le triangle $\Omega MM'$ soit rectangle isocèle et que $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=-\frac{\pi}{2}$.

Quel est l'ensemble (Γ) des points Ω quand M décrit le cercle (C_1) ?

Calculer les coordonnées de Ω en fonction de celles de M et trouver l'équation de (Γ).

4° M étant supposé fixe sur (C_1), Ω désignant le point qui lui a été associé dans la question 3, soit (R) la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit P un point quelconque du plan, P' son transformé par (S_0) et P'' le transformé de P' par (R).

p, p', p'' désignant les affixes des points P, P' et P'', exprimer p' en fonction de p, p'' en fonction de p'et de ω et enfin $p''-z$ en fonction de $p-z$.

En déduire que la composée $(R)\circ(S_0)$ de (S_0) par (R) est une homothétie de centre M. Retrouver géométriquement ce résultat.

Retour page 1

VII. Limoges, série C

Ex. 145. ./1971/limogesC/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère la loi de composition notée $\star$, telle que

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2, \qquad a \star b = a + b + a \times b.$$

Les signes + et × désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$.

1° Montrer que c'est une loi interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?

2° On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par

$$a^{(1)} = a \qquad \text{et} \qquad a^{(n)} = a^{(n-1)} \star a^{(1)}.$$

Exprimer $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de a, et en déduire l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et de n.

VIII. Limoges, série E

Ex. 146. ./1971/limogesE/exo-1/texte.tex

On considère un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Déterminer les équations des plans passant par la droite d'équations

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = z$$

et tangents à la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - z - \frac{11}{54} = 0.$$

(On pourra d'abord chercher les équations des plans passant par la droite en remarquant, par exemple, que toutes les coordonnées d'un point de cette droite s'expriment en fonction de l'une d'elles).

IX. Nancy, série C

Ex. 147. ./1971/nancyC/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$5^n - 2 \equiv 0\ [7].$$

Ex. 148. ./1971/nancyC/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les coordonnées d'un point mobile M sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x = 2 + 4\cos t \sin t \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$$

1° Donner une équation cartésienne de la trajectoire de M et la construire.

2° Définir, à l'instant t, le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération. Construire le point M le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération de M pour $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Retour page 1

X. Sud Vietnam, série C

✻ Ex. 149. ./1971/sudvietnamC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes l'équation en z

$$z^2 + (5\mathrm{i} - 6)z - 1 - \mathrm{i} + 2 = 0.$$

✻ Ex. 150. ./1971/sudvietnamC/exo-2/texte.tex

1° Montrer que, quels que soient les nombres réels x et y, on a

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y).$$

2° Montrer qu'il existe un nombre réel a, appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, tel que, quel que soit le nombre réel strictement positif k satisfaisant aux relations

$$a - k \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad a + k \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,$$

les trois nombres $\sin^2(a-k)$, $\sin^2 a$ et $\sin^2(a+k)$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Retour page 1

Chapitre 12

1972.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C

Ex. 151. ./1972/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Étudier, suivant la valeur de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 6 du nombre 5^n.
Pour quelles valeurs de n le nombre $A = 5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6 ?

Ex. 152. ./1972/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre. Un point M se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de façon que, à tout instant $t > 0$, les coordonnées de son vecteur vitesse, $\vec{V}$, soit

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{t} \quad \text{et} \quad y' = \frac{9}{2}.\frac{\ln t}{t}.$$

A l'instant $t = 1$, le point M est en $A(1\ ;\ 0)$. Calculer les coordonnées, x et y, de M, en fonction de t. Former l'équation cartésienne de sa trajectoire et construire cette trajectoire.

Problème 49 ./1972/aixmarseilleC/pb/texte

A chaque couple de réels $(\lambda,\ \mu)$ on associe l'application f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = (\lambda\ \cos x + \mu\ \sin x)\mathrm{e}^x.$$

On désigne ainsi par $(\mathscr{F})$ l'ensemble des fonctions numériques ainsi définies.

1° Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des applications continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on sait que $(\mathscr{C})$, muni des deux opérations, additions des fonctions et multiplications de fonctions par les réels, est un espace vectoriel su $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C})$.

b) Démontrer que f est la fonction nulle si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$. Démontrer que les deux fonctions E_1 et E_2 de $(\mathscr{F})$ définies par $\mathrm{E}_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ et $\mathrm{E}_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ constituent une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{F})$.

2° On sait que toutes les fonctions de $(\mathscr{F})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$;

a) Soit f une fonction de $(\mathscr{F})$; démontrer que sa fonction dérivée f' appartient aussi à $(\mathscr{F})$.
Soit D l'application, de $(\mathscr{F})$ dans lui-même, qui, à chaque élément, f, de $(\mathscr{F})$, fait correspondre sa fonction dérivée.
Démontrer que D est une application linéaire. Quelle est la matrice de D dans la base $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$?

b) Démontrer que D admet une application réciproque. En déduire que tout élément f de $(\mathscr{F})$ a une de ses primitives qui appartient à $(\mathscr{F})$.
Application : Calculer

$$\int_0^{\pi} (\lambda \cos x + \mu \sin x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

3° Expliquer sans calcul, pourquoi, étant donné f, élément de $(\mathscr{F})$, sa fonction dérivée première f' et sa fonction dérivée seconde f'', il existe des nombres réels α, β et γ non tous nuls, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

Démontrer que l'on peut choisir α, β et γ, non tous nuls et indépendants de f de telle sorte que

$$\forall f \in \mathscr{F},\ \forall x \in \mathbb{R} \;:\; \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

4° On considère un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. A chaque fonction g $g : x \longmapsto (a \cos x + b \sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$ on fait correspondre le point de (P) de coordonnées $(a,\ b)$. Ainsi, si $M(\lambda,\ \mu)$ est le point de (P) correspondant à la fonction $f : x \longmapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$, on note M' le point de (P) associé à la fonction dérivée f' de f.
Caractériser la transformation T de (P) qui, à tout point M, associe le point M'.

II. Aix Marseille, série E

Ex. 153. *./1972/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

1° Déterminer les nombres complexes $Z = X + \mathrm{i}Y$ tels que

$$Z^2 = 3 - 4\mathrm{i}.$$

2° Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E), où z est l'inconnue,

$$4(1-\mathrm{i})z^2 + 4(1+\mathrm{i})z - 3(19 - 3\mathrm{i}) = 0. \tag{E}$$

Ex. 154. *./1972/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'x,\ y'y$, on considère la courbe (C) d'équation cartésienne

$$4x^2 - 24x + 9y^2 = 0.$$

Montrer qu'il existe un repère orthonormé $X'X,\ Y'Y$ par rapport auquel la courbe (C) admet une équation de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1.$$

Quels sont la nature de (C) et ses éléments de symétrie ?
Tracer (C) en prenant 2 cm pour unité sur chaque axe.

III. Besançon, série C

Ex. 155. *./1972/besançonC/exo-1/texte.tex*

Donner la nature de la conique d'équation :

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0,$$

puis la dessiner en repère orthonormé en précisant ses axes, ses foyers et ses directrices.

Retour page 1

✻ Ex. 156. ./1972/besançonC/exo-2/texte.tex

Développer, par la formule du binôme de Newton, les polynômes suivants :

$$(x+1)^{2n}, \qquad (x-1)^{2n} \qquad \text{et} \qquad (x^2-1)^{2n}.$$

En déduire que la somme suivante :

$$1-\left(C_{2n}^{1}\right)^2+(C_{2n}\,2)^2-\left(C_{2n}^{3}\right)^2+\cdots+(-1)^{2n}\left(C_{2n}^{2n}\right)^2,$$

est égale à

$$(-1)^n\left[\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!}\right].$$

Pour cela, on étudiera le coefficient du terme en x^{2n} dans le produit des deux premiers polynômes, puis dans le troisième polynôme.

IV. Bordeaux, série C

✻ Ex. 157. ./1972/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Résoudre

a dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2+x+6=0.$$

b dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système

$$\begin{cases}\dot{2}\ x-\dot{4}\ y=\dot{2},\\ x+\dot{5}\ y=\dot{2}\ .\end{cases}$$

✻ Ex. 158. ./1972/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Soit un carré (ABCD) ; déterminer un ensemble de trois réels a, b et c pour que le point O milieu du côté [AD] soit barycentre de A, B et C affectés des coefficients a, b et c. (On pourra choisir un système d'axes.)
Déterminer l'ensemble des points, M, du plan du carré tels que

$$2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=0.$$

✻ Ex. 159. ./1972/bordeauxC/exo-3/texte.tex

Dans tout l'énoncé le symbole e désigne la base du logarithme népérien.

A) Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a

$$\int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x-\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, que

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Retour page 1

2. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, où $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer l'égalité

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer par récurrence sur n la formule

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

B) On pose

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
$$\text{et } J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{Z}^3$, on considère $H = a\mathrm{e} + b + c\mathrm{e}^{-1}$.
   Dans les deux premières questions $|a| + |c| \neq 0$.
   a) Démontrer que l'on a
   $$n!H = n!\left[ap_n(1) + b + cP_n(-1)\right] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n.$$
   b) Démontrer que l'on a
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1} \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$ quand n augmente indéfiniment.
   c) Démontrer que
   $$Q_n = n!\left[aP_n(1) + b + cP_n(-1)\right]$$
   est un entier relatif.
   Démontrer que, pour tout entier n, avec $n > 1$, on a
   $$Q_n \equiv a + (-1)^n c \pmod{n}.$$
2. Si l'on a $|a| \neq |c|$, démontrer que l'on peut trouver une entier n_0 tel que, pour tout entier n vérifiant $n > n_0$, Q_n n'est pas nul.
   En déduire qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $Q_n \neq 0$.
3. a) Démontrer, en utilisant en particulier la question B(1)b , que H ne peut être nul qui si $a = b = c = 0$.
   b) $\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des nombres rationnels, démontrer que e ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

V. Groupe I, série C

❊ Ex. 160. ./1972/groupe1C/exo-1/texte.tex

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^2 \left[1 - |x-1|\right]^3\,\mathrm{d}x.$$

✻ Ex. 161. ./1972/groupe1C/exo-2/texte.tex

Démontrer que, si trois nombres entiers relatifs, x, y, z sont tels que la somme $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 3, alors la somme $x+y+z$ est divisible par 3.
Démontrer que si $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 3 alors l'un au moins des trois nombres x, y et z est divisible par 3.

✫Problème 50 ./1972/groupe1C/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axe Ox et Oy ; a est un nombre réel fixe, φ est un nombre réel qui jouera le rôle de paramètre, mais on suppose vérifiée, tout au long du problème, la condition $\sin(\varphi-a)\neq 0$.

Partie A)

1. Démontrer que les formules

$$(1)\ \begin{cases}(x-x')\sin\varphi=(y-y')\cos\varphi\\(x+x')\sin a=(y+y')\cos a\end{cases}$$

   déterminent une application, T_φ, du plan dans lui-même qui, au point $M(x\ ;\ y)$, associe le point $M'(x'\ ;\ y')$. Déterminer les expressions de x' et y' en fonction de x et de y. Démontrer que T_φ est involutive.
2. Démontrer que T_φ laisse invariant une infinité de points et que leur ensemble, (Δ), de dépend pas de φ.
3. Lorsque a et φ sont fixés, quel est l'ensemble des milieux des segments $[MM']$?

Partie B)

1. Quelle est la nature géométrique de $\mathrm{T}\varphi$? Interpréter géométriquement les deux nombres a et φ.
2. P étant un point fixe n'appartenant pas à (Δ) ; P_φ est son transformé par $\mathrm{T}\varphi$; a restant fixe et φ prenant toutes les valeurs compatibles avec la condition $\sin(\varphi-a)\neq 0$, déterminer l'ensemble des points P_φ.

Partie C)

On suupose désormais que $a=\dfrac{\pi}{2}$ et l'on appelle F l'ensemble des T_φ ; on pose $\tan\varphi=\lambda$ et $\mathrm{T}_\varphi=\theta_\lambda$.
On note $\theta_\beta\circ\theta_\alpha$ la composée de θ_α par θ_β.

a) Montrer que la composée $\theta_{\lambda_3}\circ\theta_{\lambda_2}\circ\theta_{\lambda_1}$ de trois éléments de F est un élément θ_μ de F ; on calculera μ en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3.

b) Montrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de F est un élément de F, que l'on précisera.

c) Démontrer que le composé d'un nombre pair d'éléments de F est, d'une infinité de manières, le composé de deux éléments de F.

d) Démontrer que les composés d'éléments de F forment un groupe ; en indiquer un sous-groupe isomorphe au groupe additif des nombres réels.

VI. Maroc, série C

✻ Ex. 162. ./1972/marocC/exo-1/texte.tex

1° Montrer que, pour $0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, la fonction $y\longmapsto\sin y$ admet une fonction réciproque, notée φ.
Déterminer le domaine de définition de φ.

2° Démontrer que φ est dérivable pour $0<x<1$ et admet pour dérivée en x

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction φ est-elle dérivable pour $x=0$ et pour $x=1$?

✻ Ex. 163. ./1972/marocC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.
Soit les matrices suivantes :

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On note $\mathfrak{M}'$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha\mathrm{I}+\beta\mathrm{J}$, $(\alpha,\ \beta)\in\mathbb{R}^2$.

1° Démontrer que $\mathfrak{M}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2$.

2° Calculer J^n.
Si $A=\alpha\mathrm{I}+\beta\mathrm{J}$, calculer A^n.

3° On considère la suite $(x_n,\ y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 1) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}, \quad n\geqslant 1.$$

a) Calculer x_n et y_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour $|\alpha|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$.

VII. Nice, série C

✻ Ex. 164. ./1972/niceC/exo-1/texte.tex

Soit le fonction f de la variable réelle x définie par

$$x\longmapsto f(x)=x\log x$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de x).

1° Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2° Déterminer les primitives de f en faisant une intégration par parties et calculer la'ire du domaine plan fini limité par (C), $x'Ox$ et les droites d'équations respectives $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ et $x=\mathrm{e}^2$. On donnera une valeur approchée de cette aire, avec la précision permise par les tables de logarithmes.

✻ Ex. 165. ./1972/niceC/exo-2/texte.tex

Soit E l'ensemble des matrices carrées, M, à deux lignes et deux colonnes, de la forme suivante :

$$M=\begin{pmatrix}p & q\\ q & p\end{pmatrix}$$

$$(p\in\mathbb{R}, \qquad q\in\mathbb{R}, \qquad |p|\neq q).$$

1° Montrer que E est sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles. On rappelle qu'une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0.

2° Démontrer par récurrence que, pour tout entier n positif, la puissance n^{ieme} de M s'écrit

$$M^n=\begin{pmatrix}(p+q)^n+(p-q)^n & (p+q)^n-(p-q)^n\\ (p+q)^n-(p-q)^n & (p+q)^n+(p-q)^n\end{pmatrix}.$$

☆Problème 51 ./1972/niceC/pb/texte

Pour tout réel u, soit T_u l'application du plan, rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, dans lui-même, qui, à tout point $m(x,\ y)$, associe le point $M(X,\ Y)$ tel que

$$\begin{cases}X=x+2u,\\ Y=ux+y+u^2.\end{cases}$$

1° a) Montrer que T_u est bijective et déterminer l'application réciproque T_u^{-1}.

b) Montrer que l'ensemble, E, des applications T_u, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe additif des nombres réels.

c) Montrer que la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ est globalement invariante par T_u.

2° On définit, à partir de l'origine O, de proche en proche, le point M_n de la manière suivante :

$$M_1 = T_{\frac{1}{2}}(O),\quad M_2 = T_{\frac{1}{2^2}}(M_1),\quad M_3 = T_{\frac{1}{2^3}}(M_2),\ \dots,\quad M_n = T_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1}).$$

a) Calculer, en fonction de n, les coordonnées x_n et y_n de M_n. Quelle est la position limite de M_n quand l'entier n augmente indéfiniment.

b) Exprimer, en fonction de n, les coordonnées X_n et Y_n du barycentre, G_n, des points M_1, M_2, …, M_n affectés des coefficients égaux à 1 et en déduire la position limite des G_n quand n augmente indéfiniment.

c) Calculer les coordonnées X'_n et Y'_n du point I_n, intersection des tangentes à la parabole (P) aux points M_n et M_{n+1} et montrer que, pour tout n, I_n appartient à une parabole (P'), dont on donnera l'équation.

3° L'image par T_u du point O, c'est à dire le point M de coordonnées $x = 2u$ et $y = u^2$, est animé, par rapport au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, d'un mouvement défini, en fonction du temps t, par

$$u = \tan t \qquad \text{et} \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

a) Déterminer la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point M à l'instant t et indiquer, sur la trajectoire, les arcs qui correspondent à un mouvement accéléré ou retardé.

b) Montrer que, que t appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$, les vecteurs vitesse aux instants t et $t + \dfrac{\pi}{2}$ sont orthogonaux.

c) On considère le point N défini, à chaque instant t, par $\overrightarrow{ON} = \vec{v}(t)$. Montrer que l'équation cartésienne de l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points N peut s'écrire sous la forme $2y^2 = x^3 - 2x^2$, $x \neq 0$. Construire $(\mathscr{H})$.

VIII. Maroc, série E

Ex. 166. ./1972/marocE/exo-1/texte.tex

Même sujet que pour la série C. 158

Ex. 167. ./1972/marocE/exo-2/texte.tex

On considère la suite de fonctions définies, sur $[-1\,;+1]$, par

$$\begin{cases} t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2xt_n(x), \text{ pour } n \geqslant 1\\ t_0(x) = 1,\\ t_1(x) = x.\end{cases}$$

1° Montrer que $t_n(x)$ est un polynôme de degré n, dont on déterminera coefficient du terme de plus haut degré.

2° Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}$, t_{2p} est une fonction paire et t_{2p+1} une fonction impaire.

3° Pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on pose

$$x = \varphi(\theta), \qquad \text{avec} \qquad \varphi(\theta) = \cos\theta.$$

Montrer que $[t_n \circ \varphi](\theta) = \cos n\theta$.

IX. Pondichéry, série C

✻ Ex. 168. ./1972/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle x de degré inférieur où égal à n, $(n > 2)$.
L'ensemble E_2, des de la variable réelle x, de degré inférieur ou égal à 2, est un sous-espace vectoriel de E_n.
On considère l'application f de E_2 dans E_2 qui, à un polynôme $P(x)$ de E_2, fait correspondre le polynôme $Q(x) = f[P(x)]$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = x(x-1)P'(x) - (2x+1)P(x),$$

$P'(x)$ étant le polynôme dérivé du polynôme P.

1. $f(\mathrm{E}_2)$ désignant l'ensemble des polynômes $Q(x)$, images par f des polynômes $P(x)$ de E_2, montrer que $f(\mathrm{E}_2) = \mathrm{E}_2$.
2. Montrer que f est une application linéaire et injective.

✻ Ex. 169. ./1972/pondicheryC/exo-2/texte.tex

Á l'espace vectoriel $\mathscr{V}$, on associe l'espace affine E, dans lequel on choisit un point O.
Le vecteur $\vec{u}$ étant donné, non nul de $\mathscr{V}$, on appelle I le point de E tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$. D'autre part, k et k' sont deux nombres réels non nuls et non inverses $(k \times k' \neq 1)$.
On considère alors dans E les transformations suivantes :

– le translation $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$,

– l'homothétie $\mathrm{H}_{(O,\ k)}$ de centre O et de rapport k,

– l'homothétie $\mathrm{H}_{(I,\ \frac{1}{k})}$ et $\mathrm{H}_{(I,\ k')}$ de centre I et rapports respectifs $\dfrac{1}{k}$ et k'.

Le symbole $\circ$ désignant la composition des applications, quelle est la nature des applications suivantes :

$$A_1 = \mathrm{H}_{(I,\ \frac{1}{k})} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{H}_{(O,\ k)}$$

et

$$A_2 = \mathrm{H}_{(I,\ k')} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{H}_{(O,\ k)} ?$$

Préciser les éléments servant à les définir.

X. Rouen, série C

✻ Ex. 170. ./1972/rouenC/exo-1/texte.tex

Soit la suite de n nombres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_n$ définie par

$$u_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et, } \forall p \in [\![2, n]\!],\ u_p = u_{p-1}\, j,$$

avec $j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

a) Vérifier que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier p tel que $4 \leqslant p \leqslant n$, on a $u_p = u_{p-3}$.
Construire les images des nombres u_p.

c) En déduire, suivant la forme de n, la valeur de

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

puis calculer les expressions

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$\sigma'_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2p\frac{\pi}{3}\right)$$

Retour page 1

✻ Ex. 171. ./1972/rouenC/exo-2/texte.tex

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par les formules

$$\begin{cases} f(x) = x\ln|x|, \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue pour la valeur O de la variable ? Est-elle dérivable en ce point ? Justifier les réponses.
2. Déterminer la fonction dérivée f'. Étudier la variation de f ; en donner une représentation graphique cartésienne, dans une repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.
3. Au moyen d'une intégration par parties trouver les primitives de de la fonction f. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

✻ Ex. 172. ./1972/rouenC/exo-3/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, (P), rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C, D et E tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = -\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$.

1. Dresser le tableau de variation, de la fonction numérique f, de la variable réelle, x, telle que
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}.$$
Soit (Φ) la courbe représentative de f dans (P). Tracer cette courbe en précisant, en particulier, ses asymptotes et son centre de symétrie.
2. Soit s la symétrie par rapport à la droite (ED) et de direction $\overrightarrow{EC}$.
On pose $s(M) = M'$. Calculer le couple $(x'\ ;\ y')$ des coordonnées du point M, en fonction de celui, $(x\ ;\ y)$, des coordonnées de M.
Quelle est l'équation de la courbe, (Φ_1), transformée de (Φ) par s ? Tracer cette courbe (Φ_1) sur la même figure de (ϕ).
3. Soit g l'application affine telle que
$$g(O) = E, \qquad g(A) = C \quad \text{et} \quad g(B) = D.$$
Quelle est dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, la matrice de l'application linéaire, γ, associée à g ? Démontrer que g est bijective.
4. Étant donné le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on pose $M'' = g(M)$. Calculer en fonction de x et de y le couple $(x''\ ;\ y'')$ des coordonnées du point M''.
5. Quelles sont les équations cartésiennes des courbes (ψ) et (ψ_1), transformées de (Φ) et (Φ_1) par l'application g^{-1}, réciproque de g ?
6. Donner une interprétation géométrique simple de l'application composée $g^{-1} \circ sg$.

XI. Togo, série C et E

✻ Ex. 173. ./1972/togoCE/exo-1/texte.tex

Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, le nombre $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

✻ Ex. 174. ./1972/togoCE/exo-2/texte.tex

Soit a et b deux nombres complexes. Quelle relation doit relier a et b pour que les nombres complexes az et $\overline{\overline{z}b}$ aient, pour tout nombre complexe z,

1. même module ;
2. des arguments opposés ?

Lorsque ses deux conditions sont remplies simultanément que peut-on dire des nombres az et $\dfrac{\overline{z}}{b}$?
Application : Soit $a = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer b pour que ces deux conditions ci-dessus soient vérifiées.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

Retour page 1

Chapitre 13

1973.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C et E

✻ Ex. 175. *4 points.* *./1973/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

1. Linéariser $\cos^7\theta$.

2. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \,\mathrm{d}\theta$.

✻ Ex. 176. *4 Points.* *./1973/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Construire relativement à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'un plan affine l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$16x|x| + 36y\left|y\right| = 576.$$

☆Problème 52 *12 points.* *./1973/aixmarseilleC/pb/texte*

On étudie la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{(mx-1)(2-x)}{x^2-x},$$

où m est un paramètre réel.

A chaque valeur du paramètre m correspond une fonction et une courbe représentative (C_m) relativement à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axe $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Montrer que, quel que soit m, les courbes (C_m) passent par un point fixe que l'on déterminera. Vérifier que pour la valeur (-1) de m la courbe (C_{-1}) présente une axe de symétrie parallèle à $y'Oy$ d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

2° Trouver l'équation $Y = g(X)$ de le courbe C_{-1} dans un repère orthonormé $(\omega,\ \vec{i},\ \vec{j})$ w étant le point de coordonnées $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 0$; les nouveaux axes seront notés $X'\omega X$, $Y'\omega Y$.

Construire (C_{-1}).
Calcuter les nombres réels A et B tels que :

$$\frac{1}{4X^2-1}=\frac{A}{2X-1}+\frac{B}{2X+1}.$$

En déduire, d'une part une primitive de $X\longmapsto\dfrac{1}{4X^2-1}$ et d'autre part, l'aire de l'ensemble E des points $M(X\,;\,Y)$ du plan tels que :

$$\frac{3}{2}\leqslant X\leqslant X_0,\quad\left(X_0\geqslant\frac{3}{2}\right)\quad\text{et}\quad g(X)\leqslant Y\leqslant 1.$$

Cette aire admet-elle une limite quand X tend vers $+\infty$?

3° On considère la suite u définie par la relation de récurrence

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{2}+1\ (n\in\mathbb{N})$$

et par son premier terme U_0.
Exprimer U_n en fonction de U_0. (On pourra raisonner par récurrence.) Trouver la limite de la suite $n\longmapsto U_n$ losrque $n\Rightarrow+\infty$.

4° a) Construire, par rapport au repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, la courbe (C_1). (On vérifiera que (C_1) est portée par une hyperbole équilatère.)

b) L'hyperbole équilatère précédente passe par le point A de coordonnées $x=1$, $y=1$.
Écrire une équation de la droite AM_0, M_0 étant le point de l'hyperbole d'abscisse x_0 $(x_0>1)$. Calculer l'abscisse x, du point où cette droite rencontre l'axe $x'Ox$. Soit M_1 le point d'abscisse x_1 et appartenant à l'hyperbole. Calculer l'abscisse x_2 du point d'intersection de AM_1 avec l'axe $x'Ox$.
Cette opération étant répétée n fois donner une interprétation géométrique de la suite étudiée au 3. (On distinguera les cas où $x_0\leqslant 2$ et $x_0>2$.)

c) On considère la parabole d'équation $y=x^2-3$. En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer un encadrement de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près. On prendra le point A de la parabole de coordonnées $(x=2,\ y=1)$ et pour M_0 on choisira $x_0=\dfrac{3}{2}$, puis $x_0=\dfrac{5}{2}$.

II. Amiens, série C

Ex. 177. ./1973/amiensC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4+(3-6\mathrm{i})^2+2(16-63\mathrm{i})=0.$$

Ex. 178. ./1973/amiensC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=-x^3+x^3\log x$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de x).

1° Étudier le domaine de définition de f.
Étudier $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ aux bornes du domaine de définition ; ces quantités ont-elles des limites finies et, dans ce cas, quelles sont ces limites ?

2° Étudier les variations de la fonction f.
Construire avec précision la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 2 cm.

3° Soit $\alpha\in\,]0\,;\mathrm{e}[$. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre $x'Ox$, (C) et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=\mathrm{e}$.
Quelle est la limite de cet aire lorsque α tend zéro ?

Retour page 1

✰Problème 53

./1973/amiensC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réel, est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que ce même ensemble, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau non commutatif.

A) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices $M = aA + bB$, avec $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de base $(A,\ B)$.

2° Montrer que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}$ inversibles, et montrer que leurs inverses sont des éléments de $\mathscr{M}$.
On pose $M^1 = M$ et, pour tout n entier supérieur ou égal à 1,

$$M^n = M^{n-1} \times M.$$

Démontrer, par récurrence, que, pour tout n élément de $\star^{\mathbb{N}}$, on a

$$M^n = 2^{n-1}a^nA + 2^{n-1}b^nB.$$

B) On considère l'endomorphisme $F_{a,\ b}$ d'un plan vectoriel E ayant pour matrice $M = aA + bB$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de E.

1° Déterminer le noyau et l'image de $F_{a,\ b}$ suivant les valeurs de a et b.

2° On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}.$$

Déterminer les matrices de l'application $F_{0,\ b}$ et $F_{a,\ 0}$ par rapport à la base orthonormée $(\vec{u},\ \vec{v})$.
Montrer que chacune de ces applications est, lorsque a et b ne sont pas nuls, la composée d'une projection et d'une homothétie qu'on précisera.

3° Déterminer la matrice de $F_{a,\ b}$ par rapport à la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
Dans quels cas $F_{a,\ b}$ est-elle une rotation, une symétrie, une homothétie ?
Donner, avec précision, les éléments définissant ces applications.

C) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E. L'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On appelle f l'application affine de $\mathscr{E}$, transformant O en $\omega(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$ et dont l'endomorphisme associé est $F_{\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}}$.

1° Montrer que les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $f(m)$ s'expriment à l'aide des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point m par

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{2} \\ y' = 3y + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2° Soit (C) le cercle de centre ω, et passant par O.
Trouver une équation de la courbe (C') transformée de (C) par l'application f.
Montrer que (C') est une conique à centre. Soit ω' son centre. Écrire une équation de (C') par rapport au repère $(\omega',\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Calculer les coordonnées des sommets de cette conique dans le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

III. Amiens, série E

L'exercice 1 est le même que celui de la série C : 173.

✻ Ex. 179. ./1973/amiensE/exo-2/texte.tex

En utilisant des intégration par parties successives, calculer

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

En donner une valeur approchée avec la précision permise par les tables numériques.

Le problème est le même que celui de la série C : 53.

IV. Besançon, série C

✻ Ex. 180. ./1973/besançonC/exo-1/texte.tex

Soit f la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \tan x - x$.
Définir la fonction dérivée de f, en déduire le sens de variation de f et montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Soit F la fonction réciproque de f. Construire, dans un repère orthonormé, les représentation graphiques de f et F.

✻ Ex. 181. ./1973/besançonC/exo-2/texte.tex

Soit S l'ensemble de tous les entiers relatifs vérifiant simultanément les deux congruences

$$x \equiv 1\,[3] \qquad \text{et} \qquad x \equiv 2\,[5].$$

Trouver un entier relatif plus petit que 10 appartenant à S.
Montrer, en précisant les théorèmes utilisés, que $\forall (a,\ b) \in \mathrm{S} \times S,\ a \equiv ab\,[15]$.
En déduire l'expression générale des éléments de l'ensemble S.

✩Problème 54 ./1973/besançonC/pb/texte

A) Soit E le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ et T l'application linéaire de E dans E définie par $\mathrm{T}(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ et $\mathrm{T}(\vec{e}_2) = \lambda\vec{e_1} + \mu\vec{e}_2$ (λ et μ sont deux réels).

1° Donner la matrice de T dans la base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Déterminer les couples $(\lambda,\ \mu)$ de réels pour lesquels T est bijective.
Trouver tous les couples $(\lambda,\ mu)$ tels que T soit une isométrie vectorielle de E ; préciser alors si T est une rotation ou une symétrie vectorielle par rapport à un droite vectorielle (dont on précisera une base).

2° λ et μ qui interviennent dans la définition de T étant quelconques, on considère la suite

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3 = \mathrm{T}(\vec{e}_2,\ \dots,\vec{e}_n = \mathrm{T}(\vec{e}_{n-1}),\ \dots$$

$\vec{e}_n$ étant le transformé de $\vec{e}_{n-1}$ par T.
On pose

$$\vec{e}_n = x_n\vec{e}_1 + y_n\vec{e}_2.$$

Donner $(x_1,\ y_1)$, ainsi que $(x_2,\ y_2)$ et montrer que $\forall n \geqslant 2,\ x_n = \lambda y_{n-1}$ et $\forall n > 2,\ y_n = \mu y_{n-1} + \lambda y_{n-2}$.

3° α et β désignent les racines distinctes, réelles ou complexes, de l'équation : $x^2 - \mu x - \lambda = 0$, avec

$$\mu^2 + 4\lambda \neq 0 \quad \text{et} \lambda \neq 0.$$

Exprimer k et k', tels que $y_1 = k + k'$ et $y_2 = k\alpha + k'\beta$ en fonction de α et β.
Montrer alors par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$y_n = k\alpha^{n-1} + k'\beta n - 1.$$

Vérifier que si α et β sont complexes, k et k' sont complexes conjugués et que $k\alpha^{n-1} + k'\beta n - 1$ est réel pour tout entier naturel non nul.
Calculer alors y_n et x_n en fonction de $\alpha,\ \beta,\ n$ (n entier naturel non nul), puis établir que $x_n + \alpha y_n = \alpha^{n-1}$.

Retour page 1

B) $\mathscr{E}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. M_n désigne le point unique de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_n$.

1° a) On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que les points $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n,\ \dots$ sont tous situés sur une droite dont on donnera l'équation.

b) On suppose que $\alpha = -1$. Montrer que les points $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n,\ \dots$ sont tous situés sur la réunion de deux droites dont on donnera les équations.

2° On prend maintenant $\lambda = -1$ et $\mu = 2\cos\dfrac{2\pi}{p}$, p entier naturel supérieur à 2.

Calculer α et β, ainsi que x_n et y_n. Montrer que la suite de points $n \longmapsto M_n$ est périodique et que p est l'une de ses périodes

V. Bordeaux, série C

Ex. 182. ./1973/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Calculer $\int_{\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (intégrer par parties).

Ex. 183. ./1973/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Deux personnes, A et B, écrivent chacune, au hasard, un nombre entier de deux chiffres (en numération décimale). Soit x le nombre écrit par A, y le nombre écrit par B. Tous les couples d'entiers $(m,\ n)$ $(10 \leqslant m \leqslant 99,\ 10 \leqslant n \leqslant 99)$ sont supposés équiprobables.

En d'autres termes, on considère l'espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ p)$, où Ω est l'ensemble des couples $(m,\ n)$ tels que $10 \leqslant m \leqslant 99$ et $10 \leqslant n \leqslant 99$, et p la probabilité pour laquelle toutes les parties à un élément ait la même probabilité.

a) Quelle est la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre ? En d'autres termes, calculer la probabilité de l'ensemble Δ des couples $(m,\ n)$ tels que $m = n$.

b) Soit E l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ et $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{E})$.

c) Soit F l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ ou $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{F})$.

d) Soit G l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $m < n$. Soit G' l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $m > n$. Calculer $p(\mathrm{G})$ et $p(\mathrm{G'})$.

VI. Bordeaux remplacement, série E

Ex. 184. *4 points.* ./1973/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Deux variables aléatoires X_1 et X_2 prennent les valeurs 0, 1 et 2. Comment doit-on choisir le nombre réel p pour que le tableau ci-dessous donne une loi conjointe de $(X_1,\ X_2)$?

X_2 \ X_1	0	1	2
0	p	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{4}p$
1	$2p$	p	$\frac{1}{2}p$
2	$4p$	$2p$	p

Quelles sont les lois marginales ?
Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
Soit $Y = X_1.X_2$; calculer l'espérance mathématique de Y.

VII. Caen, série C

✻ Ex. 185. ./1973/caenC/exo-1/texte.tex

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Un point M se déplace dans ce plan. Á la date $t = 0$ où commence le mouvement, le point M est en O et son vecteur vitesse est nul.
Á toute date t positive, le vecteur accélération du point a pour coordonnées $(6t\ ;\ 2)$.

1° Déterminer en fonction de t, les expressions des coordonnées de M à la date t.

2° Tracer la trajectoire de M et discuter l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

✻ Ex. 186. ./1973/caenC/exo-2/texte.tex

1° Soit $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ n variables aléatoires réelles définissant un même espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{B},\ P)$.
On les suppose indépendantes et de même loi donnée explicitement par

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\ :\quad P\left(\{X_i = 1\}\right) = p, \qquad P\left(\{X_i = 0\}\right) = 1 - p.$$

On définit alors une variable aléatoire S telle que

$$\begin{cases} S = 0 \text{ si toute variable } X_i \text{ est nulle,} \\ S = 1 \text{ si l'une au moins des } n \text{ variables aléatoires } X_i \text{ est non nulle.} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de n telles que

$$P\left(\{S = 0\}\right) \leqslant 10^{-3}.$$

2° Un texte comporte une erreur. On relit ce texte n fois ; à chaque lecture, la probabilité de remarquer cette erreur est $\dfrac{1}{2}$.
Déterminer n de telle sorte qu'on ait une probabilité inférieure à $\dfrac{1}{1\ 000}$ de ne pas voir remarqué cette erreur après n relectures.

☆**Problème 55** ./1973/caenC/pb/texte

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que 1 et i forment une base de cet espace vectoriel.
Soit α et β deux nombres complexes, on désigne par $F_{\alpha,\ \beta}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}(z) = \alpha z + \beta \overline{z},$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

1° a) Montrer que $F_{\alpha,\ \beta}$ est une application linéaire. Soit x et y deux nombres réels, calculer $F_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(x + \mathrm{i}y)$ et $F_{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}(x + \mathrm{i}y)$.

b) Soit $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$. On désigne par Φ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ définie par

$$(\alpha,\ \beta) \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}.$$

Démontrer que Φ est injective.

c) On se propose de montrer que Φ est aussi surjective. φ étant un endomorphisme de $\mathbb{C}$ dont la matrice dans la base $(1,\ \mathrm{i})$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer, en calculant $2\varphi(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$, qu'il existe un unique couple de nombres complexes $(\alpha,\ \beta)$ tel que $\varphi = F_{\alpha,\ \beta}$.
Calculer les nombres réels $a,\ b,\ c$ et d en fonction des parties réelles et imaginaires de $\alpha + \beta$ et de $\alpha - \beta$.

2° On définit une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(z_1,\ z_2) \longmapsto \langle z_1,\ z_2\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

où l'on a posé

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2.$$

a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a

$$\langle z,\, z\rangle = z\overline{z} = |z|^2,$$

où $|z|$ désigne le module de z.
Montrer que pour tout couple $(z_1,\, z_2)$ de nombres complexes, on a

$$\langle z_1,\, z_2\rangle = \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right).$$

b) Montrer que $\langle .,\, .\rangle$ est un produit scalaire.
Quelle interprétation peut-on donner de la norme associée à ce produit scalaire ?
Montrer que $\mathbb{C}$ muni de ce produit scalaire est un plan vectoriel euclidien dont 1 et i forment une base orthonormée.

c) On désigne par m et n les images respectives de 1 et i par $F_{\alpha,\,\beta}$.
Montrer que m et n sont orthogonaux si, et seulement si, on a

$$\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = 0.$$

Montrer que m et n sont tous les deux unitaires si, et seulement si, on a

$$|\alpha|^2 + \left|\beta\right|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 0.$$

En déduire que $F_{\alpha,\,\beta}$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si, on a

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \left|\beta\right| = 1.$$

Écrire, dans chacun des cas, les matrices associées à $F_{\alpha,\,\beta}$ dans la base $(1,\, \mathrm{i})$; (on rappelle qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

où θ est un nombre réel).
Définir géométriquement les isométries obtenues en précisant leurs éléments.
Étudier en particulier $F_{\mathrm{i},\,0}$ et $F_{0,\,-1}$.

3° Soit P un espace affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien précédent. P est rapporté au repère d'origine O, de base $(1,\, \mathrm{i})$.
Soit M un point de P, on appelle affixe de M le vecteur z, élément de $\mathbb{C}$, définit par $z = \overrightarrow{OM}$.

a) Soit f l'application affine de P dans P telle que le point I, d'affixe z_0, soit invariant par f et telle que l'endomorphisme associé $F_{\alpha,\,\beta}$ soit tel que

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0.$$

z' étant l'affixe de $M' = f(M)$, montrer que l'on a

$$z' = \alpha z + (1-\alpha)z_0.$$

Vérifier que I est le seul point invariant de f, excepté pour une valeur de α.
Préciser alors l'application f correspondante.

b) f_1 étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_1,\,0}$ avec $|\alpha_1| = 1$, et de point invariant I_1, f_2 étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_2,\,0}$ avec $|\alpha_2| = 1$, et de point invariant I_2, à quel endomorphisme $F_{\alpha,\,\beta}$ est associé $f_2 \circ f_1$?
Déterminer les points invariants de $f_2 \circ f_1$.

Retour page 1

VIII. Dijon, série C

✻ Ex. 187. ./1973/dijonC/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'application affine f qui, à tout point M de coordonnées (x ; y ; z)associe le point M' dont les coordonnées (x' ; y' ; z')sont données par

$$\begin{aligned} x' &= y+2 \\ y' &= x-1 \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Démontrer que l'application linéaire associée à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle. En déduire que f est un vissage.

✻ Ex. 188. ./1973/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit α un entier relatif non nul. Pour tout couple $(a,\ b)$ d'entiers relatifs, on pose

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on note A_α l'ensemble de ces matrices quand $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{Z}^2$.

1° Montrer que A_α est stable par l'addition et le multiplication des matrices. La multiplication est-elle commutative dans A_α ?

2° Montrer qu'il existe $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ et $(c,\ d) \neq (0,\ 0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ tels que

$$M_{a,\ b} \times M_{c,\ d} = M_{0,\ 0}$$

si et seulement si α est le carré d'un élément de $\mathbb{Z}$.

3° On suppose qu'il existe β, élément de $\mathbb{Z}$, tel que $\alpha = \beta^2$. Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels qu'il existe $(c,\ d)$ différent de $(0,\ 0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ avec

$$M_{a,\ b} \times M_{c,\ d} = M_{0,\ 0}.$$

✩Problème 56 ./1973/dijonC/pb/texte

Dans ce problème,

IX. Lille, série C

✻ Ex. 189. ./1973/lilleC/exo-1/texte.tex

1° $\vec{U}$ et $\vec{W}$ désignent deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel euclidien E_3 de dimension 3, on demande de vérifier la relation

$$\left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) \wedge \vec{W} = (\vec{U}.\vec{W})\vec{W} - \left\|\vec{W}\right\|^2 \vec{U}\ ; \qquad (1)$$

on pourra pour cela supposer qu'une base orthonormé directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de E_3 est choisie de façon que, dans cette base, $\vec{U}$ ait pour coordonnées $(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\vec{W}$ $(b\ ;\ c\ ;\ 0)$.

2° On suppose que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs donnés et orthogonaux de E_3.

a) Démontrer en utilisant la relation (1) qu'il existe un seul vecteur, $\vec{U}_0$, orthogonal à $\vec{W}$, tel que

$$\vec{U}_0 \wedge \vec{W} = \vec{V}.$$

b) En déduire que l'ensemble des vecteurs $\vec{U}$ tels que $\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{V}$, est défini par $\vec{U} = \vec{U}_0 + \lambda\vec{W}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Retour page 1

✻ Ex. 190. ./1973/lilleC/exo-2/texte.tex

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence de solutions pour le système

$$\begin{cases} e^x.e^{2y} = a, \\ 2xy = 1, \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Résoudre complètement dans la cas où $a = \sqrt{e^5}$.

X. Montpellier & Grenoble, série C

✻ Ex. 191. ./1973/montpellierC/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation $x^3 = x$.

1° Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

2° Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

✻ Ex. 192. ./1973/montpellierC/exo-2/texte.tex

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la suite de terme général z_n, définie par son premier terme $z_0 = 1$, et la relation de récurrence

$$2z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}.$$

1° Démontrer que pour tout entier naturel n, non nul, le module r_n de z_n est inférieur à 1.

2° On pose $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ (où x_n et y_n sont des nombres réels et $u_n = z_n - \mathrm{i}$.
Trouver uen relation entre u_{n+1} et u_n.
En déduire que la suite de terme général x_n est une suite géométrique qui converge vers 0 et que les suites de termes généraux y_n et r_n convergent vers 1.

3° Calculer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout n supérieur où égal à n_0, on ait $|z_n - \mathrm{i}| < 10^{-6}$.

✻ Ex. 193. ./1973/montpellierC/exo-3/texte.tex

Soit un plan affine euclidien P, rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

A) On considère l'application T, de P dans P, qui au point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M dont les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ sont définies par

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -2x + y. \end{cases}$$

1. Démontrer que T est une application affine bijective et déterminer par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ l'application linéaire (ou endomorphisme) associée.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par T.
3. Quelle est la transformée d'une droite quelconque de P ? Existe-t-il des droites invariantes ? Existe-t-il des droites orthogonales à leur transformées ?
4. Soit (γ) le courbe de P d'équation $y = e^x$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   a) Donner une équation cartésienne de (Γ) transformée de (γ) par T, équation que l'on mettra sous la forme $Y = g(X)$.
   b) Étudier la fonction g, représenter (γ) et (Γ) sur un même graphique.
   c) Soit m un point de (γ), M son image pat T, calculer l'aire S du domaine compris entre les courbes (γ), (Γ) et la droite mM.
   d) Les tangentes à (γ) en m et à (Γ) en M se coupent en J.
   Calculer l'abscisse de J. Comparer S à l'aire du triangle JmM.
5. Soit h la courbe de P d'équation $4x^2 - y^2 = 4$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   a) Déterminer la nature de (h) et ses éléments remarquables.

b) Montrer que (H), transformée de (h) par T, a une équation cartésienne qui peut s'écrire $X = u(Y)$. Étudier la fonction u. Construire (H) et (h) sur un même graphique.

B) A tout réel k, on associe l'application T_k de P dans P qui a $m(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M(X\ ;\ Y)$ tel que :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = kx + y. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des transformations T_k quand k décrit $\mathbb{R}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe commutatif.
2. Déterminer l'ensemble A des applications affines f de P vers P telles que, pour tout k, on ait

$$f \circ T_k = T_k \circ f.$$

Soit A' le sous-ensemble de A formé des applications f bijectives, qui laissent O invariant.
Démontrer que tout élément de A' est le produit d'une application T_k et d'une transformation simple que l'on déterminera, et que $(\mathrm{A}', \circ)$ est un groupe commutatif.
3. On donne d'une part une transformation T_k, d'autre part, trois réels α, β, γ de somme non nulle.
Soit φ l'application de P dans P qui associe au point m le barycentre G du système $\{O,\ \alpha),\ (m\ \beta),\ (T_k(m),\ \gamma)\}$.
Montrer que φ est un élément de A ; est-ce un élément de A' ?

XI. Orléans-Tours, série C

Ex. 194. ./1973/orleansC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 4 :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3}\}.$$

1° Rappeler la structure de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2° Résoudre dans cet ensemble le système :

$$\begin{cases} \dot{3}\,x + y = \dot{3}\ ; \\ x + y = \dot{1}\ . \end{cases}$$

Ex. 195. ./1973/orleansC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},\ \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Montrer que f est dérivable en tout point x non nul. Calculer $f'(x)$.

3° Á l'aide de la définition, montrer que f set dérivable au point $x = 0$.

4° Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. N.B. : *Pour la cosntruction de la courbe, on utilisera le tableau de valeurs approchées suivantes :*

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{3}{2}$	4
$f(x)$					

✰Problème 57

./1973/orleansC/pb/texte

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions numériques f définies pour tout réel x par :

$$f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x + c$$

où a, b et c décrivent $\mathbb{R}$.

A) 1° a) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f_1, f_2, f_3 les trois éléments de $\mathscr{E}$ définies par

$$f_1(x) = \cos 2x\ ;\ f_2(x) = \sin 2x\ ;\ f_3(x) = 1.$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathscr{E}$, notée B.

2° a) Montrer que tout élément f de $\mathscr{E}$ est intégrable sur $[0\,;\pi]$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$.

b) Soit f et g deux éléments de $\mathscr{E}$ de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c') dans la base B.
On considére l'application I de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exprimer $I(f, g)$ puis $I(f, f)$ en fonction des composantes de f et de g dans la base B.

c) Déduire des résultats précédents que l'application I définit sur $\mathscr{E}$ est un produit scalaire (c'est à dire une forme bilinéaire symétrique définie positive).
Montrer que B est une base orthogonale de $\mathscr{E}$. Est-elle orthonormée ?

B) 1° Montrer par récurrence que, quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, tout élément f de $\mathscr{E}$ possède une dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, qui appartient à $\mathscr{E}$; (par convention $f^{(0)} = f$).
Montrer que l'application qui à tout élément f de $\mathscr{E}$ associe $f^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
Est-ce un automorphisme ?

2° $\mathscr{E}$ muni du produit scalaire I est un espace euclidien.
Soit $\mathscr{E}'$ le plan vectoriel engendré par f_1 et f_2 qui constituent une base orthonormée B'. On considère l'endomorphisme φ de $\mathscr{E}$ défini par

$$\varphi(f) = f^{(2)} = f''.$$

Montrer que f est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection orthogonale sur $\mathscr{E}'$.

C) Soit φ_n l'endomorphisme de $\mathscr{E}'$ défini par

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{2^n} f^{(n)}.$$

On pose $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

1° Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathscr{E}'$ pour $n = 0, 1, 2$ ou 3.

2° Écrire les matrices de φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 dans la base B'. Reconnaître ces automorphismes.

3° Montrer que Φ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe des automorphismes de $\mathscr{E}'$ isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ muni de l'addition.

XII. Outre-mer, série E

Retour page 1

✻ Ex. 196. ./1973/outre-merE/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, soit M le point coordonnées (à tout instant t de $\mathbb{R}$)

$$x = 5-8\sin^2 t \qquad \text{et} \qquad y = 1+2\sin 2t.$$

1° Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire (C) de M et construire (C).

2° Exprimer $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, vecteur vitesse et accélération de M.

3° Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{V(t)}.\overrightarrow{\Gamma(t)}$ et décrire le mouvement de M pour $t \in [0\,;\pi]$.

XIII. Paris, série C

✻ Ex. 197. ./1973/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.
soit $z = x+\mathrm{i}y$ l'affixe d'un point $M(x,\ y)$ de ce plan.

1° Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que

$$|(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}| = 2.$$

2° Étudier la transformation de P qui, à chaque point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}$.
Trouver en particulier le point qui coïncide avec son transformé.

3° En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de la première question.

✻ Ex. 198. ./1973/parisC/exo-2/texte.tex

Soit X un variable aléatoire prenant les valeurs

$$-2,\ -1,\ 3,\ 4,$$

avec les probabilités

$$0{,}10, \quad 0{,}65, \quad 0{,}15, \quad 0{,}10.$$

1° Calculer l'espérance mathématique et l'écart type σ de X.

2° Déterminer suivant les valeurs de h la probabilité $P(h)$ de l'inégalité $|X| \geqslant h$, où h est un nombre positif donné.

3° Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives des fonction

$$h \longmapsto P(h) \qquad \text{et} \qquad h \longmapsto \frac{\sigma^2}{h^2}.$$

Comparer $P(h)$ et $\dfrac{\sigma^2}{h^2}$.

XIV. Paris remplacement, série C

✻ Ex. 199. ./1973/parisCrem/exo-1/texte.tex

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.

1° On considère dans le plan P trois points distincts ABC d'abscisses respectives a, b et c.
Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en A est :

$$\frac{b-a}{c-a}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}} = 0.$$

2° Soit M un point du plan d'affixe z. On désigne par M' et M'' les points ayant pour affixes z^2 et z^3.
Quelles conditions doit vérifier z pour que les trois points $M,\ M',\ M''$ soient distincts ?
Trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que le triangle $MM'M''$ soit rectangle en M, ou en M' ou en M'' Dessiner $\mathscr{E}$.

Retour page 1

Chapitre 14

1974.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 200. *./1974/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) tel que :

$$37x_0 + 23y_0 = 1$$

En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de :

$$37x + 23y = 1.$$

Ex. 201. *./1974/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On désigne par s l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z$.

1° Préciser la nature géométrique de s et indiquer ses éléments caractéristiques.

2° Soit a un nombre complexe réel et A le point d'affixe a.
Déterminer l'ensemble

$$E = \{M \in \mathrm{P} \mid A,\ M,\ M' \quad \text{sont alignés}\}.$$

✫Problème 58

./1974/aixmarseilleC/pb/texte

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$, des fonctions continues au point O.
On désigne par $\mathscr{G}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$, des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients réels.
On définit dans $\mathscr{E}$ une addition et une multiplication par un nombre réel notées + et . respectivement par

$$\forall f \in \mathscr{E}, \quad \forall f \in \mathscr{E}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$\forall f \in \mathscr{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

On rappelle que $\mathscr{E}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A- 1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

2. Dans tout le problème on considère les deux applications
$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) = 2x$
$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall f \in \mathscr{E}, \quad \Phi(f) = f + f \circ \sigma$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ calculer $[\Phi(f)](x)$.

b) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

c) Montrer l'inclusion $\Phi(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}$.

d) Montrer l'égalité $\Phi(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$.

B- Soit $f \in \mathscr{E}$ définie de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n \qquad , \qquad f(x) = (-1)^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe aucun n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n \qquad , \qquad f(x) = 0.$$

a) Déterminer $\Phi(f)$.

b) Est-ce que Φ est injective ?

C- On note $\overline{0}$ la fonction nulle définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \overline{O}(x) = 0$.
Soit $\ker\Phi$ le noyau de Φ : $\ker\Phi = \left\{f \in \mathscr{E} | \Phi(f) = \overline{0}\right\}$

a) Établir que $\forall f \in \ker\Phi \ f(0) = 0$.

b) Établir par récurrence sur n entier naturel que :

$$\forall f \in \ker\Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = (-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

On désigne par $\Phi_{\mathscr{F}}$ la restriction de Φ à $\mathscr{F}$.

c) Montrer que $\ker\Phi_{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cap \ker\Phi$.

d) Déterminer $\ker\Phi_{\mathscr{F}}$.

D- Soit $g \in \mathscr{G}$ définie de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n} \qquad , \qquad g(x) = \frac{1}{n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe aucun $n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n} \qquad , \qquad g(x) = 0.$$

a) Montrer que $g \in \mathscr{F}$.

b) S'il existe $f \in \mathscr{E}$ telle que $\Phi(f) = g$ établir une relation entre $f\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)$ et $f\left(\frac{1}{4^n}\right)$.

Retour page 1

c) Soit la suite numérique de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^\star.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

En déduire que $u_n \longrightarrow +\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer que g n'est l'image par Φ d'aucun élément de $\mathscr{F}$.

Est-ce que $\Phi_{\mathscr{F}}$ est surjective ?

II. Abidjan, série E

Ex. 202. ./1974/abidjanE/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{V}$ ub espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et soit

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme p de $\mathscr{V}$.

1° Montrer que p est une projection vectorielle.

2° Déterminer l'image et le noyau de p.

Ex. 203. ./1974/abidjanE/exo-3/texte.tex

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

Quelle est l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC ?

Partie A.

On considère le nombre complexe : $\Delta = (a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)$.

1° Donner trois points A, B et C distincts tels que $\Delta \neq 0$.

2° Donner trois points A, B et C distincts tels que $\Delta = 0$.

3° Soit $a = 0$, $b = \mathrm{i}$ et $c = \dfrac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}$. Calculer Δ. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Partie B.

On se propose de chercher les points M du plan tels que :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} + \frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} + \frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} = \vec{0} \tag{14.1}$$

1° a) Si z désigne l'affixe de M, montrer que la relation 14.1 est équivalente à :

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} = 0 \tag{14.2}$$

b) Montrer que l'ensemble des points M vérifiant 14.1 se compose d'un ou de deux points.

c) Quand $\Delta = 0$, que représente M pour le triangle ABC ?

d) Quel est l'ensemble des points M dans le cas où : $a = 2\mathrm{i}$; $b = 1$ et $c = -1$?

2° On considère les triangles ABC correspondant à : $a = (k+1)\mathrm{i}$; $b = k$ et $c = -k$ où $k \in \mathbb{R}$. Calculer Δ. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe du point M vérifiant 14.1.

a) Montrer que, si $\Delta \leqslant 0$, le point M appartient à l'un des axes de coordonnées.

b) Lorsque $\Delta > 0$, exprimer x et y en fonction de k. Montrer que l'ensemble des points M est la conique d'équation :

$$3x^2 - 6y^2 + 6y - 1 = 0.$$

c) Donner les éléments principaux de cette conique.

III. Besançon, série C

✻ Ex. 204. ./1974/besansonC/exo-1/texte.tex

Pour quelle valeur du paramètre *positif* a l'endomrphisme φ du plan vectoriel E_2, dont la matrice dans une base de E_2 est :

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -2 & 1-a \end{pmatrix}$$

est-il involutif ?
Montrer alors que φ est une symétrie vectorielle par rapport à une droite (D) suivant la direction d'une droite vectorielle (Δ).
Déterminer (D) et (Δ) par leurs équations cartésiennes.

✻ Ex. 205. ./1974/besansonC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Étudier cette fonction et construire sa représentation graphique (C) dans plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; pour calculer la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$, on pourra poser $u = x^2$.
2. En utilisant un intégration par parties, trouver une primitive de la fonction f. En déduire l'aire de la partie du plan comprise entre $x'Ox$, (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 1)$.
   Cette aire admet-elle un limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

✫Problème 59 ./1974/besansonC/pb/texte

A- On associe à tout couple $(a,\ b)$ de nombres complexes, l'application $f_{a,\ b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_{a,\ b}(z) = az + b\overline{z},$$

où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z.

1° Démontrer que l'application $f_{a,\ b}$ est linéaire, $\mathbb{C}$ étant considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda z} = \lambda\overline{z},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2° a) Démontrer que si le nombre $Az + B\overline{z}$ (A et B étant deux nombres complexes) est nul pour tout z, alors $A = B = 0$ (on pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i).

b) Traduire alors par un système de deux relations entre $a,\ b, \overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,\ b}$ soit involutive.

c) Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,\ 0}$ involutives) ?

B- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Étant donné α de $\left]-frac\pi 2\,;+\frac{\pi}{2}\right]$, on considère l'application S qui, au point M image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), fait correspondre le point N image du nombre complexe $Z = X + \text{i}Y$ ($X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$) tel que :

$$Z = f_{a,\ b}(z) \quad \text{avec} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = \cos 2\alpha + \text{i}\sin 2\alpha \quad (\alpha \text{ donné}).$$

1. Établir les relations qui donnent X et Y en fonction de x et y et réciproquement x et y en fonction de X et Y.
   Montrer que S est une transformation involutive du plan.
2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est une droite (Δ) dont on déterminera une équation.
   Pour tout point M transformé par S démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est normal à la droite (Δ).

Retour page 1

3. Déterminer l'ensemble des points I milieux des bipoints (M, N). Préciser la nature de la transformation S.
4. On suppose, dans cette question , que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

   a) Soit (H) la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 4$. Indiquer la nature de (H).

   b) Construire cette courbe dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Soit (H') la courbe déduite de (H) par la transformation S ; donner l'équation de (H') sous la forme $Y = f(X)$ et construire, dans le même repère, la courbe (H').

   c) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par (H'), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 2\,k > 2$.
   Déterminer k pour que cette aire soit égale à $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

C- On suppose maintenant que le point M est animé d'un mouvement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Le mouvement est défini par :

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{t} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}\right). \end{cases}$$

1° Quelle est la trajectoire du point mobile M ? (On précisera le sens de parcourt).

2° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du point M à l'instant t. Préciser dans quels intervalles le mouvement est accéléré, retardé.

3° Déterminer les dates t auxquelles : $\left\|\vec{V}\right\| = 2$. Donner les coordonnées de $\vec{V}$ à l'une de ces deux dates.

IV. Bordeaux, série C

Ex. 206. ./1974/bordeauxC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer le plus grand diviseur commun d des nombres :

$$a = 4\,420 \qquad b = 2\,772$$

2. Déterminer les restes dans la division par 5 des entiers naturels : 12^d, 12^a, 12^b.

V. Bordeaux, série E

Ex. 207. ./1974/bordeauxE/exo-2/texte.tex

On se propose de calculer l'intégrale $I(\alpha)$ définie pour

$$\alpha \in [2\,;+\infty[\text{ par } : I(\alpha) = \int_2^{\alpha} \frac{x \log x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1° Déterminer a, b et c appartenant à $\mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2° Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$.

3° Montrer que lorsque α tend vers $+\infty$, $I(\alpha)$ a une limite que l'on déterminera.

Retour page 1

VI. Clermont-Ferrand, série C

✻ Ex. 208. ./1974/clermontferrandC/exo-2/texte.tex

Trouver l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient :

$$5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^{n}\equiv 0 \quad \text{modulo } 13$$

(*On pourra remarquer que* : $x^4+x^3+x^2+x=x(x+1)(x^2+1)$).

VII. Dahomey, série C

✻ Ex. 209. ./1974/dahomeyC/exo-1/texte.tex

Soit E le corps des entiers modulo 3 : E= $\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2}\}$; les coefficients intervenant dans cette exercice désignent des éléments de E.

1° a) Vérifier que l'on a, pour tout $x\in$ E, $x^3=x$.

b) Montrer en raisonnant par récurrence que l'on a pour tout $x\in$ E

$$x^n=x \qquad \text{si } n \text{ est impair}$$
$$x^n=x^2 \text{ si } n \text{ est pair, avec } n\in\mathbb{N}^\star.$$

c) En déduire que toute fonction polynôme

$$x\longmapsto\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

de E dans E est égale à une fonction du 2ème degré

$$x\longmapsto ax^2+bx+c.$$

2° Montrer que l'on a :

$$ax^2+bx+c=0,\quad \text{pour tout } x\in \text{E, si et seulement si} a=b=c=0.$$

En déduire que l'on a :

$$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c,\quad \text{pour tout } x\in \text{E, si et seulement si} a=a',\ b=b',\ c=c'.$$

3° a) Combien existe-t-il d'applications de E dans E distinctes ?

b) Combien existe-t-il de fonctions polynômes du 2ème degré de E dans E distinctes ?

c) En déduire que toute application de E dans E est égale à une fonction polynôme de 2ème degré.

✻ Ex. 210. ./1974/dahomeyC/exo-2/texte.tex

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=8x^3+6x-1.$$

1° Étudier les variations de f. Montrer que f est bijective ; en déduire le nombre de racines de f (c'est à dire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$).

2° Montrer que f a une racine x_0 telle que $0<x_0<\dfrac{1}{2}$.

3° On considère l'équation dans $\mathbb{C}$

$$8z^3-12z^2+2+\mathrm{i}=0.$$

Montrer que cette équation possède une solution z_0 de la forme $z_0=\dfrac{1}{2}+\lambda\mathrm{i}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ telle que $|z_0|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Retour page 1

☆Problème 60

./1974/dahomeyC/pb/texte

On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et par $\mathscr{E}$ un espace affine sur E rapporté à un repère cartésien $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

A- Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices 2×2 telle que $A \in \mathscr{A}$ si et seulement si $A^2 = 0$ (matrice nulle).

1° Montrer que toute matrice $A \in \mathscr{A}$ est non inversible.

2° Montrer qu'une matrice A est élément de $\mathscr{A}$ si et seulement si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & - \end{pmatrix} a \qquad \text{avec} \quad \det A = 0.$$

3° Soit f un endomorphisme *non nul* de E dont la matrice A relative à $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est élément de $\mathscr{A}$.

a) Montrer que le noyau $\mathscr{N}$, ainsi que l'image $\mathscr{I}$ de f sont des droites vectorielles ed E.

b) Montrer que l'on a : $\mathscr{I} \subset \mathscr{N}$; en déduire que $\mathscr{I} = \mathscr{N}$.

4° Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{N}$ non nul, et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit une base de E ; on pose

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad (\lambda,\ \mu \text{ réels}).$$

a) Montrer que μ est une constante à déterminer.

b) Écrire la matrice A' de f relative à $(\vec{u},\ \vec{v})$.

B- Soit maintenant g un endomorphisme de E de la forme

$$g = f + 1_{\mathrm{E}}$$

(1_{E} application identique dans E), où f est un endomorphisme de E tel que

$$f(\vec{i}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = \lambda\vec{i} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

1° a) Déterminer $f^2 = f \circ f$.

b) Calculer $g \circ (1_{\mathrm{E}} - f)$, composée de g et de $1_{\mathrm{E}} - f$.

c) Montrer que g est un automorphisme de E et déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} de g.

2° On désigne à présent par f_λ l'endomorphisme de E défini par les relations (1), et par g_λ l'endomorphisme $f_\lambda + 1_{\mathrm{E}}$. On appelle $\mathscr{G}$ l'ensemble des endomorphismes g_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

a) Quelle est la matrice M_λ de g_λ relative à $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$?

b) Déterminer l'endomorphisme $g_\lambda \circ g_\mu$ et en déduire la stabilité de $\mathscr{G}$, pour la loi $\circ$.

c) Prouver que l'application $\lambda \longmapsto g_\lambda$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(\mathscr{G},\ \circ)$.

d) Montrer que $(\mathscr{G},\ \circ)$ est un groupe commutatif.

C- Soit $h_{\lambda,\ a}$ l'application affine de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = x + \lambda y + a \\ y' = y \qquad (\lambda,\ a \quad \text{paramètres réels}). \end{cases}$$

1° Montrer que $h_{\lambda,\ a}$ est une bijection.

2° Déterminer suivant les valeurs de λ et a l'ensemble des points de $\mathscr{A}$ invariants par $h_{\lambda,\ a}$.

3° Écrire $h_{\lambda,\ a}$ comme composée $t \circ u$ d'une application affine u ayant O comme point double et d'une translation t de direction $\vec{i}$. Ce produit est-il commutatif ?

4° a) Déterminer la composée $h_{\lambda,\ 0} \circ h_{\mu,\ 0}$ des applications $h_{\lambda,\ 0}$ et $h_{\mu,\ 0}$.
En déduire que l'on a :

$$h_{\lambda,\ a} \circ h_{\mu,\ b} = h_{\lambda+\mu,\ a+b}.$$

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ des applications affines $h_{\lambda,\ a}$ muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^2,\ +)$.

Retour page 1

VIII. Dijon, série C

Ex. 211. ./1974/dijonC/exo-1/texte.tex

Soit x un réel donné ; on appelle $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est à dire : $E(x) \leqslant x < E(x)+1$. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$ par $f(x) = E(x)\sin\pi x$.

1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\sin\pi x$ lorsque x appartient à l'un des intervalles $[-1\,;\,0[$, $[0\,;\,1[$ ou $[1\,;\,2[$. En déduire que f est continue sur $[-1\,;\,2]$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x=0$ et $x=1$. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
3. Tracer le courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Ex. 212. ./1974/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, x un élément de $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ donnés, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1 Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

P_1 : p divise x^2-x

P_2 : pour tout entier naturel non nul n, p divise x^n-x.

2 Déterminer les entiers relatifs x tels que, pour tout entier naturel non nul n, 6 divise x^n-x.

Ex. 213. ./1974/dijonC/exo-3/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2-2x+y^2=0$.

Soit a et b deux réels donnés, et $\varphi_{a,b}$ l'application de P dans lui-même qui transforme tout point M, de coordonnées $x,\ y$, en le point M' de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = ye^b. \end{cases}$$

(e désigne la base des logarithmes népériens.)

On désigne par Φ l'ensemble des applications $\varphi_{a,b}$ lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

A- a) Démontrer que $\varphi_{a,b}$ est une transformation affine.

b) Démontrer que Φ, muni du produit de composition des applications, est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^2,\ +)$.

c) Déterminer la courbe $\mathscr{E}_{a,b}$, transformée de cercle $(\mathscr{C})$ par l'application $\varphi_{a,b}$; on en donnera les axes, les sommets et l'excentricité ϵ.

B- Soit Φ' les sous-ensemble de Φ défini par $\Phi' = \{\varphi_{a,\,-a\sqrt{2}},\ a\in\mathbb{R}\}$. On note f_a l'application $\varphi_{a,\,-a\sqrt{2}}$.

a) Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ dans le plan P. Déterminer l'équation de l'ensemble $\Gamma_{M_0} = \{f_a(M_0),\ a \in \mathbb{R}\}$.

Par quels points M_0, Γ_{M_0} est-il une droite ? Démontrer que Γ_{M_0} est globalement invariant par tout élément de Φ'.

b) Lorsque a n'est pas nul, on note $\mathscr{F}_a$ la courbe transformée du cercle $(\mathscr{C})$ par f_a, c'est à dire : $\mathscr{F}_a = \mathscr{E}_{a,\,-a\sqrt{2}}$.

Exprimer l'excentricité $\epsilon(a)$ de $\mathscr{F}_a$ en fonction de a. Soit h la fonction numérique de la variable réelle a définie par :

$$h(a) = \begin{cases} \epsilon(a) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si} a = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de h. Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

c) Soit A le point de coordonnées $(1\ ;\ \dfrac{e}{\sqrt{2}})$.

Donner l'équation de la courbe Γ_A et vérifier que Γ_A et $(\mathscr{C})$ sont tangents au point B de coordonnées $(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, c'est à dire qu'ils admettent même tangente en ce point.

En déduire que Γ_A est tangent à chacune des courbes $\mathscr{F}_a$ en un point que l'on précisera.

C- Construire sur un même dessin les courbes $(\mathscr{C})$, Γ_A, $\mathscr{F}_2$ et la courbe symétrique de Γ_A par rapport à l'axe des abscisses.

`Note` : pour déterminer les coordonnées de quelques points des courbes demandées, on prendra les valeurs approchées suivantes :

$$\sqrt{2} : 1{,}4 \quad e^{\sqrt{2}} : 4{,}1 \quad e^{\sqrt{2}+1} : 11{,}1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} : 0{,}7 \quad e^{-\sqrt{2}} : 0{,}2.$$

IX. Laos, série C

✻ Ex. 214. ./1974/laosC/exo-1/texte.tex

E étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3, soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de E.
On considère l'application linéaire f de E dans E définie par :

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ f(\vec{k}) &= \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

1° Montrer que $f \circ f$ est la composée d'une homothétie vectorielle h et de f $(f \circ f = h \circ f)$.

2° Déterminer le noyau E_1 ed f et l'image E_2 par f.
Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et qu'ils sont orthogonaux.

3° Soit p la projection orthogonale sur E_2.
Déduire des questions précédentes l'égalité : $f = h \circ p$.

✻ Ex. 215. ./1974/laosC/exo-2/texte.tex

Soit $I_a = \displaystyle\int_0^a x^2 e^{-x}\,dx$

a étant un nombre réel positif donné.

1. Déterminer, en intégrant par parties, l'expression I_a en fonction de a.
2. Montrer que I_a admet une limite finie quand a tend vers $+\infty$.

✻ Ex. 216. ./1974/laosC/exo-3/texte.tex

On définit une suite réelle u par la donnée des deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (1)$$

a et b étant des réels donnés non nuls.

A- 1. Calculer u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de u_1, u_2, a et b.

2. a) On suppose que $a^2 + 4b > 0$.
Montrer qu'il existe deux nombres réels distincts α et β tels que

$$\alpha + \beta = a \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta = -b.$$

b) Montrer que la suite v définie par

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

est une suite géométrique de raison β.
Qu'en déduit-on pour la suite w définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$?

c) Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.
En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

Retour page 1

B- On suppose que $a^2+4b=0$.

1. Montrer que la relation (1) peut s'écrire

$$u_{n+1}-\alpha u_n=\alpha\left[u_n-\alpha u_{n-1}\right].$$

2. On pose $u_n=s^n s_n$. Montrer que la suite s est une suite arithmétique. En déduire l'expression de s_n puis u_n en fonction de n, α, u_1 et u_2.
3. Montrer que l'expression trouvée pour u_{n+1} est la limite de celle obtenue dans la première partie quand on fait tendre β vers α.

C- On suppose que $a^2+4b<0$.

1. On désigne par α et β les racines complexes de l'équation $x^2-ax-b=0$.
Montrer qu'il existe un réel positif r et un nombre $\theta\in\,]0\,;\pi[$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1}=u_n 2r\cos\theta-r^2u_{n-1}. \tag{2}$$

2. Montrer qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=r^n(A\cos n\theta-B\sin n\theta).$$

3. a) En déduire la relation

$$u_{n+1}=\frac{r^{n-1}}{\sin\theta}\left[u_2\sin n\theta-ru_1\sin(n-1)\theta\right].$$

b) En comparant le nombre u_7 donné dans cette relation et l'expression de u_7 trouvée dans 212, exprimer $\sin 5\theta$ et $\sin 6\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

X. Lille, série C

Ex. 217. ./1974/lilleC/exo-1/texte.tex

1 On donne deux entiers a et b et on considère l'équation : $ax-by=1$
où l'inconnue est le couple (x,y) d'entiers relatifs.
Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'ensemble des solutions de cette équation ne soit pas vide.

2 Vérifier que le couple $(7,24)$ est solution de l'équation :

$$(E)\qquad 55x-16y=1$$

En déduire l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ qui sont solutions de (E).

XI. Limoges, série C

Ex. 218. ./1974/limogesC/exo-1/texte.tex

1 a désigne un entier naturel non nul donné.
Démontrer que le nombre $A=a(a^2-1)$ est divisible par 6.

2 Plus généralement, démontrer que $A_n=a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6.
(n désigne un entier naturel quelconque).
Application : Démontrer que les sommes :

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_k\qquad S_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_k^{2n+1}$$

dans lesquelles a_1, a_2, $\cdots a_k$ désignent des entiers naturels non nuls donnés, ont le même reste de division par 6.

XII. Lyon, série C

✻ Ex. 219. ./1974/lyonC/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et D la droite de P d'équation : $3x+4y-1=0$

1 Déterminer l'ensemble H de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2 Quel est l'ensemble H' des points de H dont le carré de la distance à O est un multiple de 13 ?

XIII. Montpellier, série C

✻ Ex. 220. ./1974/montpellierC/exo-1/texte.tex

φ désignant un paramètre réel vérifiant $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, on considère l'équation :

$$z^2 - \frac{2}{\cos\varphi}z + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4 \qquad \text{(E)}$$

1° Trouver les racines z' et z'' de l'équation (E) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2° Soit M' et M'' les images de z' et z'' dans le plan complexe.

Montrer que z' et z'' décrivent, quand φ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, une branche d'hyperbole que l'on dessinera.

✻ Ex. 221. ./1974/montpellierC/exo-2/texte.tex

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d étant des entiers relatifs vérifiant $ad-bc=1$.

1° Vérifier que le produit de deux matrices appartenant à E est un élément de E.

2° Montrer que E, muni de la multiplication matricielle, a une structure de groupe.

3° Trouver une matrice de E pour laquelle $a=22$ et $b=17$ (on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide).

☆Problème 61 ./1974/montpellierC/pb/texte

A On dira qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est convexe sur I si :

$$x \in I \quad ; \quad y \in I \quad ; \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1° a) Montrer que les fonction $f_1 : x \longmapsto x^2$ et $f_2 : x \longmapsto e^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $f_3 : x \longmapsto \log x$ est-elle convexe sur $]0\,;+\infty[$?
($\log x$ représente le logarithme népérien de x).

2° On considère la fonction h définie sur $[0\,;\pi]$ par $h(x) = -\sin x$.

a) Montrer que h est convexe sur $[0\,;\pi]$.

b) Montrer que si $x \neq y$: $h\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{h(x)+h(y)}{2}$.

3° Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) > 0.$$

a) Soit x_0 un réel fixé et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x)+f(x_0)}{2}\right].$$

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b) Montrer que si $x < x_0 \quad g'(x) > 0$ et si $x > x_0 \quad g'(x) < 0$.
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant 0$ et que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

B On considère la fonction φ définie sur $[0\,;2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

Étudier les variations de la fonction φ sur $[0\,;2\pi]$.

En déduire l'inégalite : $\forall x \in [0\,;2\pi] \qquad \varphi(x) \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

C Dans le plan affine euclidien, on considère le cercle Γ de centre O, de rayon R. Soit A un point fixé de Γ et α, β, γ, 3 réels positifs vérifiant $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.
On désigne par B et C les points de Γ tels que α, β, γ, soient des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

1° Calculer en fonction de R, α et β le périmètre

$$P = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$$

du triangle ABC.

2° Montrer, en utilisant la partie A2 puis la partie B, que :

$$P \leqslant 2R\varphi(\alpha+\beta) \leqslant 3R\sqrt{3}$$

et que si $\alpha \neq \beta \quad P < 3R\sqrt{3}$.

3° Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

XIV. Maroc, série C

Ex. 222. ./1974/marocC/exo-1/texte.tex

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1° Trouver les couples $(\dot{a},\ \dot{b})$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$\dot{a}\,.\,\dot{b} = \dot{0} \qquad \text{et} \qquad \dot{a} - \dot{b} = \dot{5}\,.$$

2° Résoudre l'équation $x^2 - \dot{3}\,x - \dot{4} = 0$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

3° Déterminer les entiers naturels x, tels que le nombre entier N qui s'écrit $\overline{138}$ en base x, soit divisible par 12.

Ex. 223. ./1974/marocC/exo-3/texte.tex

On considère l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices m de la forme $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b décrivent l'ensemble des nombres réels.

Soit $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.
   b) Montrer que $\{I,\ A\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$.
   c) Montrer que $\mathfrak{M}$, muni de l'addition, et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire. Est-ce un corps ?
   Montrer que si une matrice $M \in \mathfrak{M}$ est inversible dans l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, alors M^{-1} appartient à $\mathfrak{M}$.
   Que peut-on dire de l'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ des matrices $M \in \mathfrak{M}$, à coefficients rationnels ?
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit $(\vec{i},\ \vec{j})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E, représenté dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$ par la matrice $M=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'image de f, et le noyau de f, notés respectivement Im f et Ker f.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}$ vérifiant la relation $M \times M = M$.

   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ représente dans E, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, une projection vectorielle de direction D' sur une droite D. Déterminer les droites D et D'.

4. Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}$ vérifiant la relation $M \times M =$I.

   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ représente dans E, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, une projection vectorielle de E, direction Δ', par rapport à une droite Δ. Déterminer les droites Δ et Δ'.

5. Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, P telles que A×P=P×A, est $\mathfrak{M}$.

   Montrer que si φ est un endomorphisme fixé de E, l'ensemble des endomorphismes g de E, tels que $g \circ \varphi = \varphi \circ g$, est un anneau unitaire, pour l'addition et la composition des endomorphismes.

   Montrer que si φ et g sont des endomorphismes de E, tels que $g \circ \varphi = \varphi \circ g$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(g \circ \varphi) & \subset & \mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Im}\, \varphi \\ \mathrm{Ker}\, g \cup \mathrm{Ker}\, \varphi & \subset & \mathrm{Ker}\,(g \circ \varphi) \end{array}$$

XV. Paris, série C

Ex. 224. ./1974/parisC/exo-1/texte.tex

Trouver, sous la forme $a + ib$ (a et b réels), un nombre complexe ω tel que

$$\omega^2 = 48 + 14\mathrm{i}.$$

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 - 5(1+\mathrm{i})z - 12 + 9\mathrm{i} = 0.$$

Vérifier que le quotient des deux racines est un imaginaire pur.

Ex. 225. ./1974/parisC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \log(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$$

le symbole log désignant le logarithme de base e.

1° Étudier la variation de la fonction f. Soit C la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la variation de f.

   Montrer en posant $x = \log(\mathrm{e}^x)$, que $f(x) - 2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$, et en déduire l'asymptote correspondante de C.

2° Soit k un nombre réel strictement positif.

   Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 - k = 0,$$

   a) par le calcul,

   b) en utilisant la courbe C.

☆Problème 62 ./1974/parisC/pb/texte

N.B. - La partie C est indépendante des parties A et B.

A- Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée de E, r_1 la rotation vectorielle E⟶E ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{i}$ et telle que $r_1(\vec{j}) = \vec{k}$, r_2 la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{j}$ et telle que $r_1(\vec{k}) = \vec{i}$.

1. On pose $r = r_2 \circ r_1$, $r^2 = r \circ r$, $r^3 = r \circ r^2$.
   Quelles sont les images de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par r, par r^2, par r^3 ?
   Quel renseignement relatif à l'angle de la rotation vectorielle r déduit-on de ce qui précède ?
2. Calculer en fonction des coordonnées x, y, z d'un vecteur quelconque $\vec{V}$ de E les coordonnées x', y', z' du vecteur $r(\vec{V})$ de E invariants par r.
3. Soit r_3 la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{k}$ et telle que $r_3(\vec{i}) = \vec{j}$.
   Déterminer les images de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ par la rotation vectorielle $r \circ r_3$, c'est à dire $r_2 \circ r_1 \circ r_3$. Qu'en déduit-on pour cette rotation ?
   Indiquer de même ce que sont les rotations $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_3 \circ r_2$.
   (Les résultats de ce A3 ne seront pas utilisés par la suite).

B- Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, associé à E, et $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$ (les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant définis au A).
On désigne par ρ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dans laquelle tout point M, de coordonnées x, y, z, a pour image le point M' de coordonnées :

$$x' = y, \quad y' = -z, \quad z' = -x.$$

1. Préciser la nature de cette application ρ.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan de $\mathscr{E}$ d'équation $z = 1$. Déterminer l'ensemble H des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux.
   La courbe H admet un centre de symétrie Ω. Écrire une équation de H relativement au repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et indiquer la nature de la courbe H.
3.

C- Les lettres $\mathscr{E}$, O, ρ ont le même signification que dans la partie B.

1. On donne un nombre réel k, strictement positif, et l'on appelle L_k l'ensemble des points M, appartenant au plan $\mathscr{E}$ d'équation $z = 0$, et tels que

$$MM' = k\,OM$$

   (en posant encore $M' = \rho(M)$).
   Écrire une équation de L_k dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On pose $x = \lambda \cos\theta$, $y = \lambda \sin\theta$, avec $\lambda \geqslant 0$.
   Montrer que si le point M de coordonnées x, y appartient à L_k et si $\lambda > 0$, alors $\sin 2\theta$ s'exprime simplement en fonction de k.
   En déduire, suivant la valeur de k, la nature géométrique de l'ensemble L_k.
   Application numérique : $k = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   Calculer les valeurs correspondantes de θ.
2. Soit Σ l'ensemble dont les éléments sont les inverses $\dfrac{1}{n}$ des entiers relatifs non nuls n.
   On se propose de chercher certaines valeurs rationnelles k pour lesquelles $\sin 2\theta$ appartient à Σ.
   Montrer, à cet effet, que si $k = \dfrac{p}{q}$, où p et q désignent des entiers naturels premiers entre eux, les conditions C(2)a et C(2)b suivantes sont équivalentes :

   a) $\sin 2\theta \in \Sigma$;
   b) $p^2 - 2q^2 = \pm 1$.

   En déduire les couples (p, q) cherchés pour lesquels $1 \leqslant p < 20$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\sin 2\theta$ (on ne cherchera pas l'expression générale des couples (p, q) vérifiant la condition C(2)b).

Retour page 1

XVI. Paris remplacement, série C

✻ Ex. 226. ./1974/parisCrem/exo-1/texte.tex

On désigne par E un espace affine de dimension 3, par A, B, C trois points fixes de E, non alignés, et l'on donne :

– un point P, quelconque, de E,

– trois réels α, β, γ.

Trouver un point M de E tel que $(M, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ soit une repère de E et que les coordonnées de P dans ce repère soient les nombres α, β, γ (on cherchera, à cet effet, à déterminer $\overrightarrow{PM}$, et l'on discutera l'existence et l'unicité de M selon α, β, γ et selon la position du point P).

XVII. Nantes, série C

✻ Ex. 227. ./1974/nantesC/exo-1/texte.tex

Étudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2.
Démontrer que le nombre $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ est toujours divisible par 9, quel que soit l'entier naturel n.

XVIII. Rennes, série C

✻ Ex. 228. ./1974/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 10.

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{2}x = \dot{0}$

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$$

XIX. Rouen, série C

✻ Ex. 229. ./1974/rouenC/exo-1/texte.tex

Linéariser $\cos^4 x$.

Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 3\cos x \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Chapitre 15

1975.

Sommaire

I. Aix marseille, série C

✻ Ex. 230. ./1975/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Les coordonnées (dans ce repère) d'un point mobile M sont données en fonction du temps par

$$x = e^t, \qquad y = e^{2t} - 2t,$$

M ayant $(x\ ;\ y)$ pour coordonnées dans $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et e désigne la la base du logarithme népérien.

1° Déterminer la trajectoire (T) de M [équation cartésienne et construction de (T)]

2° Déterminer l'hodographe (H) du mouvement de M. Tracer cet hodographe dans le même repère que (T). (il s'agit de l'hodographe par rapport au point O).

3° Calculer l'aire de la portion de plan limitée par l'axe $(O, \vec{\imath})$ par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ et par la courbe (T).

✱ Ex. 231. ./1975/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires, 1 boule blanche. On tire en une seule fois trois boules. On veut la probabilité d'avoir

A : deux boules rouges au moins,

B : deux boules de même couleur au moins,

C : 1 boule de chaque couleur.

On admet l'équiprobabilité des tirages.

1° Proposer un espace probabilisé fini permettant la description de cette situation.

2° Calculer ensuite $p(A)$, $p(B)$, $P(C)$.
On attachera la plus grande importance au 1 Les réponses à la question 2 n'ont d'intérêt que si un espace probabilisé fini $(\Omega,\ \beta,\ p)$ a été correctement défini.

☆Problème 63 ./1975/aixmarseilleC/exo-3/texte

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers « relatifs », $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad \text{et } u = 1 + j,$$

$|z|$ désigne le module de $z \in \mathbb{C}$.

A) 1. Établir la relation $1 + j + j^2 = 0$.
Calculer $u^2, u^3 \dots, u^n$ pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérifier que $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, corps des nombres réels.

B) 1. Soit $E = \{z \in \mathbb{C} | \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, z = a + jb\}$.
Y a-t-il unicité de l'écriture d'un élément de E sous la forme $z = a + jb, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$?
Déterminer $U = \{z \in E | |z| = 1\}$.

2. Établir que les opérations sur $\mathbb{C}$ définissent sur E une structure d'anneau unitaire.
Déterminer les éléments inversibles (pour la multiplication) de E. Montrer que la multiplication (dans $\mathbb{C}$) définit sur U une structure de groupe.

3. Déterminer $z \in E$ tel que $z\overline{z} = 3$ et $z + \overline{z} > 0$.

4. Soit $v = 1 - j$; montrer que, si v peut être écrit $v = \lambda\mu, \lambda \in E, \mu \in E$, alors $\lambda \in U$ ou $\mu \in U$.

C) 1. Soit $I = \{w \in E | \exists z \in E, w = vz\}$, avec $v = 1 - j$.
Établir que I est un sous-groupe du groupe additif E.
Déterminer $\{z \in I | x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$.
Démontrer que $\forall w \in I, \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $w = \alpha v + \beta(vu)$ avec unicité du couple (α,β)).

2. Soit $z = a + jb \in E, (a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Montrer que $z - (a + b) \in I$.
En déduire que $\forall z \in E$, on a l'une des relations $z \in I, z - 1 \in I, z + 1 \in I$.

3. On définit une relation binaire $\sim$ entre éléments de E par $z \sim z' \iff z - z' \in I$.
Vérifier que cette relation est bien une relation d'équivalence.
Vérifier que cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication dans E.
Vérifier que l'ensemble quotient peut être muni d'une structure de corps par des opérations définies naturellement à partir des opérations dans E. Préciser la nature de ce corps (nombre d'éléments, comparaison avec un corps classique).

II. Aix marseille remplacement, série C

✱ Ex. 232. ./1975/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 et 3^n.
En déduire le reste de la division par 7 de 3^{123}.
Déterminer le chiffre x des unités pour que $3^{123} + \overline{197x}_{10}$ soit divisible par 7.

✻ Ex. 233. ./1975/aixmarseilleCrem/exo-2/texte.tex

On désigne par log la fonction « logarithme népérien ».

1° Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par $f(x) = x^2+1-\log x$. Déterminer le domaine maximal de définition de f.

2° Soit g la fonction numérique de la variable réelle x, définie par $g(x) = x - 1 - \dfrac{\log x}{x}$.
Déterminer le domaine maximal de définition de g.
Étudier les variations de g. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
Calculer dans ce repère l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}, \qquad x-1 \leqslant y \leqslant g(x).$$

III. Amiens, série C

✻ Ex. 234. ./1975/amiensC/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 = 0.$$

Déterminer le module et l'argument de chacune de ses racines.

2° On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42.$$

a) Montrer l'existence d'un réel r tel que $P(r) = 0$.

b) Montrer l'existence d'une fonction polynôme Q telle que

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ P(z) = (z-r)Q(z).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

✻ Ex. 235. ./1975/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par
$\forall x,\ x \in]-\infty, 0]\ f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,
$\forall x,\ x \in]0, 1[\quad f(x) = x\log x$,
$\forall x,\ x \in]1, +\infty[\ \ f(x) = -e^{-x} + e^{-1}$.

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1.

2° Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

3° Soit $a \in]0, 1[$. Calculer l'aire D_a du domaine délimité par la courbe (C) et les droites ayant pour équations respectives $x = a$, $x = 1$ et $y = 0$.
Cette aire D_a a-t-elle une limite quand a tend vers 0.

☆**Problème 64** ./1975/amiensC/pb/texte

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appellera $\mathscr{P}$ le plan vectoriel associé à P.
Soit f_λ l'application affine de P dans P laissant O invariant, dont l'application linéaire associée φ_λ a pour matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \dfrac{\lambda+1}{2} & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) 1. Pour quelles valeurs de λ, f_λ est-elle bijective ?

2. Déterminer, suivant les valeurs de λ, le noyau de φ_λ noté $\ker \varphi_\lambda$. Lorsque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, en donner une base.

Retour page 1

3. Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'image de φ_λ notée $\operatorname{Im}\varphi_\lambda$. En donner une base.
4. Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle involutive ?
5. Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'ensemble des points invariants par f_λ. Lorsque cet ensemble est une droite, préciser cette droite par un point et un vecteur directeur.

B) Étude de f_λ pour $\lambda = -1$.

a) Déterminer l'ensemble $U = \{\vec{u} \in \mathscr{P} | \varphi_{-1}(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

b) Montrer que les sous-espaces U et $\ker(\varphi_{-1})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{P}$.

c) En déduire que φ_{-1} est la composée de d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle, que l'on déterminera.

d) En déduire que f_{-1} est la composée de d'une projection et d'une homothétie.

C) Étude de f_λ pour $\lambda = -1$.

a) Déterminer les réels k pour chacun desquels il existe un vecteur $\vec{V}$ non nul vérifiant $\varphi_3\left(\vec{V}\right) = k\vec{V}$.

b) Pour chaque réel k déterminé au 1° vérifier que l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathscr{P} | \varphi_3(\vec{u}) = \vec{u}\}$ est une droite vectorielle.

c) En désignant par k_1 et k_2 les deux réels trouvés en C),1° ($k_1 < k_2$), montrer que qu'il existe une base $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ de $\mathscr{P}$ telle que

$$\forall i \in \{1,2\},\ \varphi_3\left(\vec{V}_i\right) = k_i\vec{V}_i.$$

4° Montrer que tout point $M' = f_3(M)$ est obtenu en construisant la projection m de M sur la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{V}_1$ suivant la direction donnée par $\vec{V}_2$, puis en construisant M' tel que $\overrightarrow{mM'} = 2\overrightarrow{mM}$. Faire une figure avec un point M, sa projection m et le point M'.

D) Étude de f_λ pour $\lambda = 0$.

a) Montrer que f_0 est une symétrie par rapport à une droite relativement à une direction que l'on précisera.

b) Soit le cercle (C) de centre $\Omega(0, -2)$ de rayon 1.

a) Donner une équation de ce cercle dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Soit (E) l'image de (C) par f_0. Déterminer une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

c) Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera les coordonnées du centre, le demi-grand axe et le demi petit axe.

d) Faire une figure.

IV. Amiens remplacement, série C

Ex. 236. ./1975/amiensCrem/exo-1/texte.tex

1° On considère les nombres $A = 2n + 3$ et $B = 5n - 2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Trouver deux entiers naturels $u$et v, premiers entre eux, tels que $Au - Bv$ soit indépendants de n. En déduire que, si A et B ne sont pas premiers entre eux, leur pgcd est 19.

2° Étudier l'ensemble des entiers naturels n tels que le pgcd de A et B soit égal à 19.

V. Besançon, série C

Ex. 237. ./1975/besanconC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1° En étudiant les variations de la fonction f, montrer que l'équation

$$f(x) = 0 \tag{15.1}$$

a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2° Montrer qu'aucune des solutions de l'équation (1) n'est rationnelle : on pourra pour cela montrer qu'il est impossible de trouver deux nombres $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\frac{r}{s}$ soit une solution de cette équation.

3° Calculer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$. Poser alors $x = \cos 2\alpha$, et en déduire les trois solutions de l'équation 15.1 sous forme trigonométrique.

✻ Ex. 238. ./1975/besanconC/exo-2/texte.tex

1° Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1},$$

où le nombre e est la la base des logarithmes népériens.
Étudier les variations de f. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$.

2° Calculer l'aire de la partie du plan

$$A = \{M(x,y) | 1 \leqslant x \leqslant 3 \qquad 1 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

✩Problème 65

./1975/besanconC/pb/texte

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & -1 \end{bmatrix},$$

où λ est un nombre réel non nul.

A) 1. a) Montrer que si A_λ et A_μ sont deux éléments de $\mathscr{M}$, on a

$$A_\lambda \cdot A_\mu = A_\mu \cdot A_\lambda \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad \lambda = \mu.$$

b) Montrer que $A_\lambda \cdot A_\mu + A_\mu \cdot A_\lambda = h(\lambda,\mu)I$, où $h(\lambda,\mu)$ est un scalaire réel et I la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $h(\lambda,\mu) = 0$ si, et seulement si $\lambda = \mu$.
Que peut-on dire de A_λ^2 ?

c) Calculer $(A_\lambda + A_\mu)^2$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que

$$(A_\lambda + A_\mu)^{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda-\mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n} I.$$

b) Montrer que la matrice $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ.

3. On dit qu'une matrice $M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$ dont les éléments dépendent d'un paramètre x, possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ s'il existe une matrice $L = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ telle que

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} a(x) \quad \beta = \lim_{x\to+\infty} b(x)$$
$$\gamma = \lim_{x\to+\infty} c(x) \quad \delta = \lim_{x\to+\infty} d(x).$$

a) Montrer que la matrice $C_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ a, pour n tendant vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

b) Exprimer la matrice $B_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_p + A_{p+1})^2$.

Retour page 1

c) Montrer que la matrice B_n a, lorsque $n \to +\infty$, une limite que l'on calculera.

B) On pose $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices de la forme $aI + bJ$; a et b étant réels.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble $\mathscr{M}_{2,2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.
2. $\mathscr{E}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est-il un anneau ?
3. Soit $M = aI + bJ$ un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$ la matrice M^q peut s'écrire $M^q = a^q I + q a^{q-1} J$.

C) $\overrightarrow{E}$ étant un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère pour a, b fixés l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $\overrightarrow{E}$ défini par la matrice $M = aI + bJ$.

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un automorphisme de $\overrightarrow{E}$ si, et seulement si, $a \neq 0$.
2. Quelle est la matrice représentant $f_{a,b}$ quand on rapporte le plan à une nouvelle base orthonormée $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$ déduite de la première par une rotation vectorielle d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$?

VI. Besançon, série E

VII. Bordeaux, série C

Ex. 239. ./1975/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soit a un entier naturel donné.
Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x vérifiant simultanément les conditions :
$x \equiv a \ (modulo\ 2)$ et $x \equiv 3 \ (modulo\ 5)$.
(On pourra utiliser l'inconnue auxiliaire $y = x - 5a$.)

Ex. 240. ./1975/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la similitude S de centre O, d'angle θ, $(\theta \neq 2k\pi)$ de rapport r, et la rotation R de centre A (de coordonnées $(1, \sqrt{3})$) et d'angle φ $(\varphi \neq 2k\pi)$.

1° Montrer que les transformations d'une même figure (F) par le produit $R \circ S$ et par le produit $S \circ R$ se déduisent l'une de l'autre par une translation.

2° On donne $\theta - \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer r de façon que le vecteur définissant la translation du (1) soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
(Toute forme de solution est acceptée : géométrique, par les complexes. . .)

☆Problème 66 ./1975/bordeauxC/pb/texte

A) On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites numériques (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si l'on considère sur $\mathscr{E}$ les lois suivantes
$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \alpha.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}},$
$(\mathscr{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\vec{0}$ l'élément neutre.
Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

1° Vérifier que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
Montrer que l'application φ de $\mathscr{F}$ vers $\mathbb{R}^2$ qui à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe le couple (u_0, v_0) est une application linéaire bijective. En déduire la dimension de $\mathscr{F}$.

2° Soit $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathscr{F}$. Montrer que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ dans $\mathscr{F}$ équivaut à

$$\lambda u_0 + \mu v_0 = 0, \qquad \lambda u_1 + \mu v_1 = 0.$$

En déduire que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une partie libre de $\mathscr{F}$ si, et seulement si $u_0v_1 - u_1v_0 \neq 0$.

3° a) Soit r un réel non nul. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si $2r^2 - 3r - 2 = 0$.

b) En déduire l'existence dans $\mathscr{F}$ de deux suites du type précédent qu'on notera $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathscr{F}$.

c) En déduire la forme générale des éléments de $\mathscr{F}$.
Déterminer ces éléments $\vec{u}$ en fonction de u_0 et de u_1.

B) Pour toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f quand elle existe.
On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2f^{(2)} - 3f^{(1)} - 2f = \theta$$

(où θ désigne l'application nulle).

1° Démontrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Établir que les applications φ et ψ telles que

$$\varphi(x) = e^{2x} \qquad \text{et } \psi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

sont des éléments linéairement indépendants de $\mathscr{S}$.
Remarque : Il y avait déjà une application φ au A1° ...

2° Soit f appartenant à $\mathscr{S}$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}$ appartient à $\mathscr{S}$ pour tout entier n.
En déduire que f appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si f possède des dérivées de tous ordres et si pour tout réel x la suite de terme général $f^{(n)}(x)$ appartient à $\mathscr{F}$.

3° On veut montrer que $\mathscr{S}$ est engendré par φ et par ψ. Soit f un élément de $\mathscr{S}$. Montrer que pour

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$$

implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha f^{(n)} + \beta\varphi^{(n)} + \gamma\psi^{(n)} = 0.$$

Quel (sic) est la forme générale des éléments de $\mathscr{S}$?

VIII. Caen remplacement, série C

Ex. 241. ./1975/caenCrem/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les couples d'entiers naturels, non nuls, $(a,\ b)$ tels que leur p.g.c.d. et leur p.p.c.m., notés respectivement d et m vérifient la relation

$$2m + 3d = 78.$$

IX. Dahomey, série C

Ex. 242. ./1975/dahomeyC/exo-1/texte.tex

1° Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $6x - 3y = a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, a est un multiple de 3.

2° Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

- $6x - 3y = 5$;
- $6x - 3y = 3$.

Retour page 1

3° En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :

$$(6x-3y-4)(2x-3y+4)=1.$$

X. Dakar, série C

✻ Ex. 243. ./1975/dakarC/exo-1/texte.tex

On considère dans $\mathbb{Z}$, l'équation de congruence

$$X^3+2X^2-X-13 \equiv 0\,[11]. \tag{1}$$

a) Montrer qu'il existe deux nombres α et $\beta \in \mathbb{Z}$, tels que

$$X^3+2X^2-X-13=(X+1)(X^2+\alpha X+\beta)-11.$$

b) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont l'une des solutions des deux équations

$$X+1 \equiv 0\,[11] \qquad (2) \tag{15.2}$$
$$X^2+X-2 \equiv 0\,[11] \qquad (3) \tag{15.3}$$

c) Déterminer les solutions de l'équation (1).

✻ Ex. 244. ./1975/dakarC/exo-2/texte.tex

Au jeu de poker, on utilise un jeu de 32 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as, dans chacune des couleurs suivantes : pique, cœur, carreau, trèfle) et l'on donne 5 cartes à chaque joueur.
Quelle est la probabilité pour qu'un joueur (déterminé) ait une échelle royale (cinq cartes de la même couleur qui se suivent dans l'ordre précédemment mentionné) ?

XI. Dijon, série C

✻ Ex. 245. ./1975/dijonC/exo-1/texte.tex

1° Étudier le reste de la division euclidienne par 7 de 10^n lorsque n décrit l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2° Déterminer les chiffres x et y tels que le nombre $\overline{2xyyx2}_{10}$ dans le système décimal soit divisible par 21.

✻ Ex. 246. ./1975/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les courbes (H) et (E), ensembles des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient

$$4x^2-9y^2+8x+54y-113=0 \tag{H}$$

$$16x^2+9y^2+32x-54y-47=0 \tag{E}$$

Trouver les équations réduites de (H) et (E).
Vérifier que (H) et (E) ont le même centre de symétrie.
Trouver les axes de symétries de (H) et (E) ainsi que leurs foyers.
Reconnaître les courbes (H) et (E).

XII. Lyon, série C

✻ Ex. 247. ./1975/lyonC/exo-1/texte.tex

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne par 7 et 2^n et 3^n.
En déduire l'ensemble des entiers naturels tels que 7 divise 2^n+3^n.

Retour page 1

XIII. Lyon remplacement, série C

✻ Ex. 248. ./1975/lyonCrem/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = 1$.

2° Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = p$ où p est un nombre premier.

XIV. Mexique, série C

✻ Ex. 249. ./1975/mexiqueC/exo-1/texte.tex

On donne l'application f du corps des nombres complexes dans lui-même

$$z \longmapsto f(z) = z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 5(\mathrm{i}-2)z + 3(7+\mathrm{i}).$$

Déterminer l'ensemble E des nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$, sachant qu'un nombre réel est élément de E.

✻ Ex. 250. ./1975/mexiqueC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction f_a qui à tout x fait correspondre

$$f_a(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Préciser le domaine de définition de f_a suivant les valeurs de a.

b) On considère maintenant a positif.
Étudier les variations de la fonction f_a. Tracer le courbe représentative de f_2 en axes orthonormés.
Préciser les tangentes aux points d'ordonnée nulle.

c) Déduire de l'étude précédente la courbe (C) correspondant à l'équation

$$y^2(a+x) = x^2(a-x).$$

XV. Mexique, série E

✻ Ex. 251. ./1975/mexiqueE/exo-1/texte.tex

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln|x+2|}{|x|}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un système d'axes rectangulaires.

1° Montrer que (C) admet comme centre de symétrie le point $(-2\ ;\ 0)$. Étudier f et construire (C).

2° Pour $a > -2$, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe $x'Ox$, (C) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = a$.
Cette aire admet-elle une limite

a) quand a tend vers -2,

b) quand a tend vers $+\infty$?

✻ Ex. 252. ./1975/mexiqueE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on considère trois points A, B, C tels que ABC soit un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse AC, avec $d(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = a$, où a est un réel positif.

1° Déterminer le point G du plan P vérifiant

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}} - \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \overrightarrow{0}.$$

2° En déduire l'ensemble E des points M du plan P tels que

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{GB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{GC}}^2 = 0.$$

Vérifier que E contient les points B et C.

☆Problème 67

./1975/mexiqueE/pb/texte

A) On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices M de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b-c \\ b+c & -a \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}$?

2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{M}_1$ des matrices inversibles de $\mathscr{M}$.

3° Quel est le sous-ensemble $\mathscr{M}_2$ de $\mathscr{M}$ des matrices M qui vérifient $M \times M = \mathrm{I}$ où $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

B) Soit u et v, les deux nombres complexes suivants :

$$u = c\mathrm{i} \quad \text{et} \quad v = a + b\mathrm{i}.$$

On considère l'application $l_{u,\,v}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $l_{u,\,v}(z) = uz + v\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

1° $\mathbb{C}$ étant considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que $l_{u,\,v}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2° Écrire la matrice de $l_{u,\,v}$ dans la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$.

3° Quelles conditions u et v doivent-ils vérifier pour que $l_{u,\,v}$ soit bijective ?

4° Donner une relation liant u et v pour que $l_{u,\,v}$ soit involutive.

5° Quel est l'ensemble des éléments invariants par une application $l_{u,\,v}$ involutive ?

C) On considère la plan affine euclidien P rapporté au repère $\left(O;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, où $\overrightarrow{\imath}$ a pour affixe 1 et $\overrightarrow{\jmath}$ a pout affixe i, et l'on suppose que $u^2 + v\overline{v} = 1$.
Soit $f_{u,\,v}$ l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $uz + v\overline{z}$.

1° Quel est l'ensemble E des points invariants par $f_{u,\,v}$?

2° Soit A un point de E.
On note $\varphi_{u,\,v}$ l'application linéaire associée à $f_{u,\,v}$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\varphi_{u,\,v}(\overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AM}.$$

3° Préciser quelle est la transformation $f_{u,\,v}$.

4° Quel est l'ensemble des couples $(u,\ v)$ tels que $f_{u,\,v}$ soit une symétrie orthogonale ?

XVI. Montpellier, série C

✻ Ex. 253.

./1975/montpellierC/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $7x - 4y = 4$.

2° Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}_x$ dans le système de base x et $\overline{49}_y$ dans le système de base y. Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}_x$ dans le système de base x et $\overline{125}_y$ dans le système de base y.
Déterminer x et y puis a et b.

Retour page 1

XVII. Nancy Metz, série C

✼ Ex. 254. ./1975/nancyC/exo-1/texte.tex

1° Trouver l'ensemble des entiers naturels divisant 276.

2° Trouver les paires d'entiers naturels dont le pgcd d et le ppcm m vérifient :

$$\begin{cases} m+3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$$

✼ Ex. 255. ./1975/nancyC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A, B et O' ayant pour coordonnées respectivement $(a\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,b\,;\,0)$, $(0\,;\,0\,;\,c)$.
Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ et soit A', B', C' les points définis par

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}.$$

Soit S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales ayant pour axes respectivement OA, BB' et $A'C'$.

1° La transformation $T = S_3 \circ S_2 S_1$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

2° Quelle est l'application linéaire associée à T.

3° Déterminer la nature de T.

☆Problème 68 ./1975/nancyC/pb/texte

A) On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de degré au plus égal à 2. On rappelle que $\mathscr{E}$ est de dimension 3.
Soit a un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$. On considère les trois applications polynomiales R_a, S_a, T_a définie de la manière suivante : pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$R_a(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{2(1+a)}, \quad S_a(x) = \frac{x^2-1}{a^2-1}, \quad T_a(x) = \frac{(x+1)(x-a)}{2(1-a)}.$$

1° Calculer les valeurs de R_a, S_a, T_a aux points -1, a, 1 et en déduire que ces trois applications polynomiales sont linéairement indépendantes. Constituent-elles une base de $\mathscr{E}$?

2° Soit α, β et γ des nombres réels. Montrer qu'il existe un, et un seul, élément P de $\mathscr{E}$ tel que $P(-1) = \alpha$, $P(a) = \beta$ et $P(1) = \gamma$ en cherchant à exprimer P à l'aide de R_a, S_a, T_a.

B) 1° Soit f l'application de $[-1\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x3+x} + \frac{1}{3-x}\right); \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2° Déterminer un élément Q_0 de $\mathscr{E}$ qui prend aux points -1, 0, 1 les mêmes valeurs que celles de f et calculer $Q_0 - f$ ainsi que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_0(x)\,\mathrm{d}x$.

3° On pose $\Delta = \displaystyle\int_{-1}^{1} (Q_0(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

En minorant et en majorant $9 - x^2$ lorsque $|x| \leqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{810} \leqslant \Delta \leqslant \frac{1}{720}.$$

Retour page 1

4° En déduire un encadrement de $\log 2$ par des nombres décimaux dont la différence est 16.10^{-5}.

C) On considère à nouveau, lorsque $a^2 \neq 2$, les polynômes R_a, S_a, T_a introduits au A).

1o Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^{1} R_a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} S_a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} T_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

2o On suppose que $(a^2-1)(a^2-9) \neq 0$. Soit Q_a l'élément de $\mathscr{E}$ qui prend aux points -1, a, 1 les mêmes valeurs que f.
Calculer

$$I(a) = \int_{-1}^{1} Q_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Il est conseillé de vérifier que pour $a = 0$, on obtient le résultat trouvé au B2).

3o Étudier les variations de $I(a)$ lorsque a parcourt l'intervalle $]-1\,;1[$.

4o En déduire qu'il existe un nombre a_0 tel que $-1 < a_0 < 1$ et $I(a_0) = \log 2$.

XVIII. Nancy Metz, série E

Sujet identique à celui de la série C BesançonE75

XIX. Nice, série C

Ex. 256. ./1975/niceC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.
On donne trois points distincts A, B, C de $\mathscr{E}$. Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$M \longmapsto f(M) = 2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2.$$

1° Justifier l'existence de G barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 3, −2.
Donner une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.

2° Montrer que $f(M) = 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + k$ avec $k = f(G)$.

3° Discuter suivant la valeur de k, la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $f(M) = 4$.

Ex. 257. ./1975/niceC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\left|x^2 + x\right| + 1}{|x| + 1}.$$

1° Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.

2° Représentation graphique de f en repère orthonormé. On précisera en particulier les asymptotes à la courbe représentative.

XX. Orléans Tours, série C

Retour page 1

✻ Ex. 258. ./1975/orleansC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\log x}{x}$, où $\log x$ désigne le logarithme népérien de x.

1° Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2° En déduire, suivant les valeurs du nombre réel a, le nombre de solutions de l'équation

$$\mathrm{e}^{ax} = x.$$

3° Calculer l'aire comprise entre l'axe $(0,\ \vec{\imath})$, la courbe (C) et les droites d'équation respectives $x = 2$, $x = 3$. Donner de cette aire une valeur approchée, en utilisant uen table de logarithmes.

✻ Ex. 259. ./1975/orleansC/exo-2/texte.tex

On désigne par α et α' les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

1° Calculer le module et l'argument de α et α' (on prendra $\alpha = a + \mathrm{i}b$, avec $b > 0$).

2° n désignant un entier naturel, dans la plan complexe, on considère, les points M_n (d'affixes α^n) et M'_n (d'affixe α'^n).

Construire ces points pour $0 \leqslant n \leqslant 4$. Montrer que l'ensemble E' des points M'_n se déduit de l'ensemble E des points M_n par une application simple. Quel est l'ensemble $E \cap E'$?

Soit k un entier positif donné. Comment peut-on par une transformation du plan, obtenir M'_{n+k} à partir de M_n ?

XXI. Paris, série C

✻ Ex. 260. ./1975/parisC/exo-1/texte.tex

1° Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Calculer la dérivée $F'(x)$ de F au point x, en considérant F comme la fonction composée de la fonction

$$g : x \longrightarrow 1 + x^2$$

et le la fonction $h : X \longrightarrow \displaystyle\int_1^X \ln t \,\mathrm{d}t \quad (X > 0)$.

2° Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale

$$\int_1^X \ln t \,\mathrm{d}t \quad (X > 0).$$

Exprimer alors $F(x)$, sans utiliser le signe d'intégration et retrouver l'expression $F'(x)$.

✻ Ex. 261. ./1975/parisC/exo-1/texte.tex

1° Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Retour page 1

Calculer la dérivée $F'(x)$ de F au point x, en considérant F comme la fonction composée de la fonction

$$g : x \longrightarrow 1 + x^2$$

et le la fonction $h : X \longrightarrow \displaystyle\int_1^X \ln t \,\mathrm{d}t \quad (X > 0)$.

2° Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale

$$\int_1^X \ln t \,\mathrm{d}t \quad (X > 0).$$

Exprimer alors $F(x)$, sans utiliser le signe d'intégration et retrouver l'expression $F'(x)$.

☆Problème 69

./1975/parisC/pb/texte

A) On donne un entier naturel a, supérieur ou égal à 1.

1° Trouver l'ensemble $\mathscr{J}$ des solutions du système suivant d'inéquations, où l'inconnue est le nombre réel x :

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{-x^{3a} + 3x^a - 1}{1 - x^{3a}} < 0 \end{cases}$$

(on pourra poser $x^a = X$).

2° Calcul numérique (on pourra utiliser une table de logarithmes).

Trouver la plus petite valeur de l'entier a pour laquelle le nombre $\dfrac{49}{51}$ appartient à $\mathscr{J}$.

B) On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les suites réelles u, applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \longmapsto u_n$.
La somme $u + u'$ de deux suites u et u' de $\mathscr{E}$ est la suite $n \longmapsto u_n + u'_n$.
lLe produit γu d'une suite u par un réel γ est la suite $n \longmapsto \gamma u_n$.
La suite O est la suite $n \longmapsto 0$ (réel nul).
L'ensemble $\mathscr{E}$, muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1° Soit p un réel donné, appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.
On désigne par E l'ensemble des suites u de $\mathscr{E}$ qui satisfont la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p) u_n = 0. \tag{1}$$

a) Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation 1.

b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

c) Soit v et w les deux suites de E définies par $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_0 = 0$, $w_1 = 1$.
Montrer que $\{v,\ w\}$ est un système libre.
Montrer que, si u est une suite quelconque de E, u est égale à $u_0 v + u_1 w$.
Que peut-on dire alors de $\{v,\ w\}$? Quelle est la dimension de E ?

2° a) Vérifier que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les suites de E sont des suites arithmétiques.

On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $n \longmapsto t^n$ (t réel non nul) appartient à E, si, et seulement si, t est tel que $pt^2 - t + 1 - p = 0$.

Vérifier que l'on obtient ainsi deux suites formant une base de E. Écrire alors une expression générale du terme u_n d'une suite quelconque de E, en désignant par λ et μ les coordonnées de u dans cette base.

b) Soit α un entier donné, supérieur où égal à 1. On désigne par u une suite de E telle que $u_0 = 1$ et $u_\alpha = 0$.

On prend $p = \dfrac{1}{2}$, exprimer alors u_n en fonction de α et de n.

On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$ et l'on pose $x = \dfrac{1-p}{p}$; exprimer u_n en fonction de x, α et n.

C) Un jeu oppose deux joueurs A et A', auxquels on attribue respectivement, au début du jeu, un « avoir » de a jetons et un « avoir » de $2a$ jetons (a entier donné, supérieur ou égal à 1).

La rencontre comporte des parties successives et indépendantes, numérotées 1, 2, 3, …

La probabilité que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, et égale à p $(0 < p < 1)$.

Après chaque partie le joueur perdant donne un jeton au gagnant.

le jeu s'arrête lorsqu'un joueur est « ruiné », c'est à dire qu'il ne dispose plus de jetons, et le joueur « ruiné » perd le match.

1° a) k désignant un entier naturel, on considère la variable aléatoire X_k égale à l'avoir du joueur A après la partie de rang k (si $k \neq 0$) et avant la partie de rang $k+1$ (si celle-ci a lieu).

Ainsi $X_0 = a$ et $0 \leqslant X_k \leqslant 3a$.

Quelles sont les valeurs « possibles » de X_1 ; de X_2 ; de X_{2k} et X_{2k+1} ?

b) Si $X_K = 0$ le joueur A est ruiné ; si $X_k = 3a$ el joueur A' est ruiné ; dans chacun de ces cas le match ne se poursuit pas au delà de la $k^{\text{ième}}$ partie.

Si X_k est différent de 0 et $3a$, on admet [1] que le probabilité de ruine ultérieure du joueur A ne dépend pas de k, mais seulement de la valeur n de X_k.

On désigne par r_n la probabilité de ruine de A, connaissant n. On a ainsi $r_0 = 1$ et $r_{3a} = 0$.

En considérant les deux valeurs que peut prendre X_{k+1} sachant $X_k = n$, montrer [2] que

$$r_n = (1-p)r_{n-1} + p\,r_{n+1}$$

et constater que la suite $n \longmapsto r_n$ vérifie la relation de récurrence **??** du **??**).

Exprimer alors, à l'aide de B(2)b, le terme r_n en fonction de n et de a (lorsque $p = \frac{1}{2}$) ou en fonction de n, a et de $x = \frac{1-p}{p}$ (lorsque $p \neq \frac{1}{2}$).

c) On désigne par r'_m la probabilité de ruine du joueur A', connaissant son avoir m.

Montrer qu'on obtient r'_m en remplaçant, dans l'expression de r_n, n par m et p par $1-p$ (c'est à dire x par $\frac{1}{x}$).

Écrire cette expression de r'_m (pour $p = \frac{1}{2}$ et pour $p \neq \frac{1}{2}$).

Vérifier la relation

$$r_a + r'_{2a} = 1. \tag{2}$$

2° En notant que r_a et r'_{2a} sont les probabilités de ruine de A et de A' au début de match, on voit que le jeu est favorable au joueur A si $r_a < r'_{2a}$, c'est à dire, d'après la relation (2) précédente, si $2r_a < 1$.

Que vaut r_a lorsque $p = \frac{1}{2}$?

On prend $p \neq \frac{1}{2}$. Exprimer la différence $D_a = 2r_a - 1$ en fonction de x et de a.

Pour quelles valeurs de x a-t-on $D_a < 0$? (cf. **??**).

p étant fixé supérieur à $\frac{1}{2}$, comment choisir a pour que le jeu soit favorable au joueur A ?

Application numérique : $p = 0{,}51$; utiliser B pour donner la plus petite valeur convenable de l'entier a.

XXII. Paris remplacement, série C

Ex. 262. ./1975/parisCrem/exo-1/texte.tex

On désigne par n un entier naturel non nul, par $n!$ le produit des n premiers entiers naturels non nuls, et par a_n le produit $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ des n premiers entiers naturels impairs.

Démontrer l'égalité

$$a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$$

1. On ne cherchera pas à définir l'espace probabilisé relatif à ce jeu et l'on se bornera à faire le raisonnement suggéré
2. On pourra admettre ce résultat

En déduire que le produit $(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n$ est divisible par 2^n et que, pour tout entier naturel p tel que ce produit soit divisible par 2^p, on a $p \leqslant n$.

XXIII. Nancy, série C

Ex. 263. ./1975/nancyC/exo-1/texte.tex

1° Trouver l'ensemble des entiers naturels divisant 276.

2° Trouver les paires d'entiers naturels dont le pgcd d et le ppcm m vérifient :

$$\begin{cases} m+3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$$

XXIV. Poitiers remplacement, série C

Ex. 264. ./1975/poitiersCrem/exo-1/texte.tex

1° Déterminer pour $p = 1, 2, 3, 4$ les restes de la divisions euclidienne de 5^p par 13.

2° En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

XXV. Reims, série C

Ex. 265. ./1975/reimsC/exo-1/texte.tex

1° Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n.

2° En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

Ex. 266. ./1975/reimsC/exo-2/texte.tex

On désigne par P un plan affine rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit S_α la transformation qui, à tout point M de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M_1 dont les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel.

1° Trouver les valeurs de α pour lesquelles S_α n'est pas bijectif, et déterminer, pour chacune de ses valeurs, l'image de S_α ainsi que l'ensemble des points M pour lesquels $S_\alpha(M) = O$.

2° M étant fixé, distinct de O, déterminer l'ensemble (E) des points M_1, transformés de M par S_α, lorsque α décrit $\mathbb{R}$.
Comment faut-il choisir le point M pour que (E) contienne le point O ?

☆Problème 70

./1975/reimsC/pb/texte

A) Soit f la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{\ln x}, \end{cases}$$

pour x strictement positif différent de 1.

Retour page 1

1° Étudier f : continuité, dérivabilité, sens de variation, représentation dans un repère orthonormé. (On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère, en étudiant la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.)

2° On pose, pour $0 \leqslant x < 1$,

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour $x > 1$,

$$G(x) = \int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Que vaut $F'(x)$? Que vaut $G'(x)$?
(On ne cherchera pas à calculer des expressions de $F(x)$ et $G(x)$.)
Dire pourquoi on n'a pas le droit d'écrire $F'(x) = G'(x)$.

B) On pose, pour x strictement positif et distinct de 1,

$$H(x) = \int_{x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

f étant la fonction définie au (A).

1° a) Montrer que $H(x)$ est toujours positif ou nul.

b) Montrer que $H(x)$ s'exprime, suivant les cas, à l'aide de la fonction F ou à l'aide de la fonction G.
En déduire l'expression de $H'(x)$ pour $0 < x < 1$, puis pour $x > 1$.
Soit φ la fonction numérique définie et continue sur $[0\,;1[$.
Établir que $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. (On pourra désigner par Φ une primitive de φ.)
En déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

2° On pose, pour x strictement positif et distinct de 1,

$$K(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer la dérivée de la fonction,
b)
c)

3° a)
b)
c)
d)

XXVI. Rennes, série C

Ex. 267. ./1975/rennesC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0.$$

Retour page 1

XXVII. Rennes remplacement, série C

✻ Ex. 268. ./1975/rennesCrem/exo-1/texte.tex

Déterminer toutes les solutions de l'équation $7x + 11y = 1$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

XXVIII. Rouen, série C

✻ Ex. 269. ./1975/RouenC/exo-1/texte.tex

Soit p un entier naturel premier.

1° Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, le nombre C_p^k est divisible par p.

2° En déduire que, quel que soit l'entier n, le nombre $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.

3° Démontrer alors le petit théorème de Fermat, c'est à dire que $n^p \equiv n$ (*modulo* p).

XXIX. Strasbourg, série C

✻ Ex. 270. ./1975/strasbourgC/exo-1/texte.tex

1° x et y étant deux entiers relatifs, déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$.

2° Existe-t-il trois entiers relatifs x, y, z tels que $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$?

XXX. Toulouse, série C

✻ Ex. 271. ./1975/ToulouseC/exo-1/texte.tex

1° Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 400.

2° Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs, d leur pgcd.

Trouver une condition nécessaire et suffisante liant les nombres $\dfrac{a}{d}$ et $\dfrac{b}{d}$ pour que d soit égal à $a - b$.

3° Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs dont le pgcd est égal à la différence de deux entiers et dont le ppcm est 400.

XXXI. Vietnam remplacement, série C

✻ Ex. 272. ./1975/vietnamCrem/exo-1/texte.tex

Retour page 1

Chapitre 16

1976.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 273. ./1976/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4\,[7]$).
3. On considère le nombre B qui s'écrit $B = \overline{2103211}^4$. déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 7.

Ex. 274. ./1976/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
Montrer que (C) admet un centre de symétrie.
x étant un réel strictement négatif, déterminer

$$\int_{-1}^{x} \frac{e^t}{e^t - 1}\,dt$$

et étudier sa limite quand x tend vers $-\infty$.

✰Problème 71

./1976/aixmarseilleC/pb/texte

Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

A- 1. On considère la courbe (H) d'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1. \tag{1}$$

Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.

2. On considère dans le plan (P) le mouvement du point $M(x\ ;\ y)$ tel que

$$x = \frac{1}{\cos(2t)} \qquad \text{où} \quad t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[\qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(2t)$$

a) Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.

b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Vérifier que le mouvement est accéléré, c'est à dire que la fonction $t \longmapsto \left\|\vec{V}(t)\right\|$ est croissante.

B- On appelle E l'ensemble des applications affines F de (P) dans (P) telles que $F(O) = O$ et $F(H) = H$. cette dernière condition exprimant que la courbe (H) est globalement invariante par F.

On appelle f l'application linéaire associée à F de matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. a) Quelle peut-être, par une application affine non bijective, l'image du plan (P) ?
En déduire que tout élément de E est une bijection.

b) Montrer que (E, $\circ$) est un groupe.

2. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ tels que $M' = F(M)$. On aura

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy. \end{cases}$$

Sachant que F$\in$ E si et seulement si $\mathrm{F}^{-1} \in$E, écrire l'équation de $\mathrm{F}^{-1}(H)$ en fonction de $(a,\ b,\ c,\ d)$.
En déduire que

$$\mathrm{F}^{-1}(H) = H \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ c^2 - 2d^2 = 1 \\ ac - 2bd = 0. \end{cases}$$

On pourra utiliser les points $A(1\ ;\ 0)$, $B(\sqrt{3}\ ;\ 1)$, $C(-\sqrt{3}\ ;\ 1)$ points appartenant à la courbe (H).

3. En déduire que F est élément de E si et seulement si la matrice de f est de la forme $\begin{bmatrix} a & 2\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{bmatrix}$ avec $\epsilon \in \{-1,\ +1\}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$.

C- Soit E' le sous-ensemble des applications F de E telles que $\epsilon = +1$.

1. Montrer que E' est stable pour $\circ$.

2. Soit (L) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad \text{avec} \quad (x,\ y) \in \mathbb{N}^2.$$

Vérifier que $M_0(1\ ;\ 0)$ et $M_1(3\ ;\ 2)$ appartiennent à (L).
Soit F_1 l'application affine de E' telle que $a = 3$ et $b = 2$.

Retour page 1

On considère la suite de points $M_n(x_n\ ;\ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad M_{n+1} = \mathrm{F}_1(M_n).$$

Montrer que $M_n = \mathrm{F}_1^n(M_0)$ où $\mathrm{F}_1^2 = \mathrm{F}_1 \circ \mathrm{F}_1$ et $\mathrm{F}_1^n = \mathrm{F}_1^{n-1} \circ \mathrm{F}_1$.
Vérifier que M_n est un élément de (L).

3. Établir par récurrence que

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^n &= x_n + y_n\sqrt{2}\\ (3-2\sqrt{2})^n &= x_n - y_n\sqrt{2}\end{aligned}$$

quel que soit n élément de $\mathbb{N}$.
En déduire x_n et y_n en fonction de n.

4. On appelle (T) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ de (H) pour lesquels x et y appartiennent à $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'ensemble défini par :

$$A_n = \{M\ /\ M \in (\mathrm{T}),\ x_n \leqslant x < x_{n+1}\}.$$

Montrer que A_{n+1} est l'image par F_1 de A_n.
En déduire

$$M \in A_n \Rightarrow \left[\mathrm{F}_1^{-1}\right]^n(M) \in A_0.$$

Montrer que

$$M \in (\mathrm{L}) \cap A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{F}_1^{-1}(M) \in (\mathrm{L}).$$

En déduire que tout point de (L) est un élément de la suite (M_n).

II. Aix-Marseille & Nice, série E

✻ Ex. 275. ./1976/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex

1° Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$x \mapsto f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

2° Construire sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Calculer l'aire du domaine E, ensemble des points $M(x, y)$ défini par :

$$E = \{\ (x, y)\ |\ 1 \leq x \leq \alpha \quad 0 \leq y \leq f(x)\ \} \qquad \alpha \geq 1$$

Calculer la limite de cette aire lorsque α augmente indéfiniment.

✻ Ex. 276. ./1976/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes Ox, Oy et Oz. Le plan xOy est le plan horizontal et le plan yOz est le plan frontal. On prend $1cm$ comme unité de longueur. Soit le point $A(6;2;3)$ et la droite D définie par les équations :

$$x = 1+3\rho \qquad y = 7+3\rho \qquad z = 3+2\rho \qquad \rho \in \mathbb{R}$$

1° Faire l'épure de la droite (Δ) verticale passant par A et de la droite (D).

2° Représenter la perpendiculaire commune à la droite (Δ) et à la droite (D).

3° Indiquer la plus courte distance de (Δ) à (D). La calculer.

☆Problème 72 ./1976/aixmarseilleE/pb/texte

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine de ce plan dans lui-même qui, à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' - a = x\,(1+\cos\theta) - y\,\sin\theta \\ y' - b = x\,\sin\theta + y\,(1+\cos\theta) \end{cases}$$

θ est un nombre réel tel que $-\pi < \theta \leq +\pi$, et a et b sont des nombres réels donnés.

I- 1° Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est le composé d'une rotation vectorielle d'angle $\theta/2$ et d'une homothétie vectorielle.

2° Calculer les coordonnées du point invariant I par f. Quelle est la nature de f ? Caractériser cette application.

3° Montrer que : $\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$.

4° f peut-elle être une rotation ?

5° Si θ varie, a et b étant fixés, quel est l'ensemble des points invariants par f ?

II- 1° On supposer $a = b = 0$ et $\theta \neq 0$, θ fixé. Quel est l'ensemble des points M tels que la droite (MM') contienne le point $A(2\,;0)$? Quel est l'ensemble des points M' ?

2° Faire une figure et retrouver les résultats de la question 1. en utilisant les propriétés géométriques de l'application f.

III- Á tout point $M(x,\ y)$ on associe dans le plan complexe son affixe $z = x + iy$. Soit deux cercles (C) et (C') passant par O et $A(2\ ;\ 0)$, λ et μ les ordonnées de leurs centres respectifs . $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \mu$.

1° Écrire les équations de ces cercles. Calculer leurs rayons.

2° Une droite de coefficient directeur m ($m \in \mathbb{R}$) contenant A coupe (C) en M et (C') en M', M et M' distincts de A en général.

Déterminer les couples de coordonnées $(x,\ y)$ et $(x',\ y')$ de M et M'. z et z' étant les affixes respectives de M et M', calculer z'/z en fonction de λ et μ. En déduire que (C') est l'image de (C) par une similitude que l'on caractérisera en fonction de λ et de μ.

III. Amiens, série C

Ex. 277. ./1976/amiensC/exo-1/texte.tex

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ si } x \leqslant 0 \qquad \text{et} \quad f(x) = x^2 \ln x \text{ si } x > 0.$$

1° Etudier la continuité de f.

2° Etudier la dérivabilité de f.

3° Etudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

4° Calculer l'aire A_α du domaine plan délimité par la courbe (C) et les droites respectives : $y = -1$, $x = \alpha$ et $x = 1$ avec $0 < \alpha < 1$.

Quelle est la limite A de A_α lorsque α tend vers 0 ?

Ex. 278. ./1976/amiensC/exo-2/texte.tex

Un paquet de treize cartes à jouer comprend six as, trois rois et quatre dames.
Les valeurs des cartes sont les suivantes :

– un as quelconque : +5

– un roi quelconque : +2

– une dame quelconque : -1

L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On suppose les tirages équiprobables.

1° Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Retour page 1

2° On considère la variable aléatoire X qui à tout tirage fait correspondre la somme des valeurs des cartes tirées.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

✰Problème 73

./1976/amiensC/pb/texte

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
On note $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\left[\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2\right] \quad \left[\forall (a',\ b') \in \mathbb{R}^2\right]$$
$$(a,\ b) \star (a',\ b') = (aa' + \alpha bb',\ ab' + a'b)$$

où α est un réel donné.
On pose $\overline{\gamma} = (1,\ 0)$, $\quad \overline{w} = (0,\ 1)$, $\quad \overline{0} = (0,\ 0)$.
$\mathbb{N}^\star$ désigne $\mathbb{N} - \{0\}$.

1° a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former A^2. Montrer que $A^2 - 2aA + a^2 I = O$. Pour tout n, exprimer A^n en fonction de a, b et n.

Montrer qu'il existe $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tel que $A^2 = O$. Que confirme ce dernier résultat ?

b) Soit $u = (a, b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a) pour exprimer u^n en fonction de a, b, et n.

c) Résoudre dans $(\mathbb{R}^2,\ +\star)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \overline{0} \qquad u^2 + u + \overline{\gamma} = \overline{0}$$

A- 1. Montrer que, pour tout α réel, $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star)$ est un anneau commutatif unitaire.

2. Préciser l'ensemble des réels α tels que pour chacun d'eux $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star)$ soit un corps.

3. Soit $\mathcal{M}_\alpha$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha \text{ est un réel donné}$$

On note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\mathcal{M}_\alpha, +, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star)$.

4. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 0$.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former A^2. Montrer que $A^2 - 2aA + a^2 I = O$. Pour tout n, exprimer A^n en fonction de a, b et n.

Montrer qu'il existe $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tel que $A^2 = O$. Que confirme ce dernier résultat ?

b) Soit $u = (a,\ b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a) pour exprimer u^n en fonction de a, b, et n.

c) Résoudre dans $(\mathbb{R}^2,\ +,\star)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \overline{0} \qquad u^2 + u + \overline{\gamma} = \overline{0}$$

d) Résoudre dans $(\mathcal{M}_0,\ +,\ \star)$ les équations :

$$A^2 + 2A = 0$$
$$A^2 + A + I = 0.$$

5. On suppose $\alpha = \frac{4}{9}$. Déterminer les éléments $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2 - \{\overline{0}\}$ pour lesquels l'équation :

$$(a,\ b) \star (x,\ y) = \overline{0}$$

admet, dans $\mathbb{R}^2$, des solutions $(x,\ y)$ différentes de $\overline{0}$.

B- Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée B= $(\vec{i}, \vec{j})$. On appelle F_α l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{E}$ dont la matrice dans B appartient à $\mathcal{M}_\alpha$, α étant donné.

1. Dans cette question on considère le cas où $\alpha = 1$.

   a) Déterminer l'ensemble P des éléments de F_1 qui sont des projections vectorielles de $\mathscr{E}$ sur des droites vectorielles.

   Caractériser avec précision chacun des éléments de P. Déterminer l'ensemble J des éléments de F_1 qui sont des involutions de $\mathscr{E}$.

   Caractériser avec précision chaque élément de J.

   b) Montrer que l'ensemble J muni de la loi $\circ$ de compositions des applications est un groupe commutatif. (On pourra établir la table de Pythagore de la loi).

2. On considère maintenant le cas $\alpha = -1$.

   a) Quels sont les éléments de F_{-1} tels que $a^2 + b^2 = 1$?

   b) Soit φ un élément de F_{-1} défini par $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On désigne par E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathscr{E}$, et par $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de E.

   Soit f l'application affine de E dans e associé à φ telle que $f(0) = 0$ et (Γ) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ vérifient l'équation :

   $$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0.$$

   Déterminer une équation de $f(\Gamma)$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   En déduire la nature de $f(\Gamma)$ et représenter graphiquement cet ensemble.

   c) En utilisant la définition bifocale d'une conique à centre, montrer que (Γ) est une ellipse que l'on tracera dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   d) On considère dans le plan E rapporté au repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ le mouvement du point m de coordonnées $(x\,;\,y)$ définies par l'application suivnate de $\mathbb{R}$ vers E :

   $$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2\cos 2t + \sin 2t) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t - 2\cos 2t) \end{cases}$$

   Montrer que le mouvement est périodique.

   Trouver une relation, indépendante de t, liant x et y. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

   Préciser sur une période les intervalles de temps où le mouvement est accéléré ou retardé.

IV. Amiens, série E

Ex. 279. ./1976/amiensE/exo-1/texte.tex

1° Soit f l'application de l'intervalle $]1;5[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \log_5 \frac{1-x}{x-5}$$

où $\log_5$ désigne la fonction logarithmique de base 5. 'Etudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (on ne démontrera ni l'existence d'un point d'inflexion, ni l'existence d'un centre de symétrie).

2° Montrer que f est bijective. Étudier les propriétés de l'application g réciproque de f : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, sens de variation.

3° Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

4° Définir g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le même repère que celui où a été tracée (C).

Retour page 1

✲ Ex. 280. ./1976/amiensE/exo-2/texte.tex

Voir exercice 274 série C Amiens.

✩PROBLÈME 74 ./1976/amiensE/pb/texte

Voir problème 73 série C Amiens.

V. Besançon , série C

✲ Ex. 281. ./1976/besançonC/exo-1/texte.tex

r est un nombre réel strictement positif et α un réel de $]-\pi\,;\pi]$.

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2r\cos\alpha z + r^2 = 0.$$

On appellera z_1 et z_2 les solutions et on précisera le module et l'argument de chacune.

2° Calculer z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.

Cas particulier : $r = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Trouver une relation indépendante de n entre P_n et P_{n+3} dans ce cas ; quelle est alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$?

✲ Ex. 282. ./1976/besançonC/exo-2/texte.tex

n est un nombre entier strictement positif. Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, où e est la base du logarithme népérien.

1° Démontrer que le nombre I_n existe pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ et qu'il est strictement positif.
Calculer I_1.

2° Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$. (On pourra utiliser une intégration par parties).
Calculer alors I_2 et I_3.

3° Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

✩PROBLÈME 75 ./1976/besançonC/pb/texte

A- Soit un espace vectoriel réel E de dimension $n \leq 3$. On se propose de déterminer la dimension de E pour qu'il existe un endomorphisme φ de E tel que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$ (1) où Id_E désigne l'application identique de E.

1° Montrer que l'image par φ d'une droite vectorielle D est une droite vectorielle $\varphi(D)$, et que l'intersection de D et de $\varphi(D)$ est le vecteur nul (on pourra vérifier, $\vec{u}$ étant un vecteur définissant D, que les réels α et β tels que $\alpha\vec{u} = \beta\varphi(\vec{u})$ sont nécessairement nuls compte-tenu de (1)). En déduire, si un tel endomorphisme existe, que $n \geq 2$.

2° D étant une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ non nul, quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F_D engendré par $\vec{u}$ et $\varphi(\vec{u})$? Quelle est l'image de F_D par φ ?

3° Soit $n = 2$. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul de E, montrer, si φ existe et vérifie (1), que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est une base de E ; quelle est la matrice de φ dans cette base ? Existe t-il des endomorphismes de E, de dimension 2, vérifiant la condition (1) ?

4° Soit $n = 3$. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de E vérifiant (1). $\vec{u}$ étant un vecteur non-nul, montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \vec{v})$ soit une base de E. Compte-tenu de l'expression de $\varphi(\vec{v})$ dans cette base, quelle est la matrice de φ dans cette base ? En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure ?

B- $\mathcal{P}$ étant un espace affine associé à E espace vectoriel euclidien de dimension 2, on note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

1° Déterminer, à l'aide des matrices, les endomorphismes φ de E tels que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$. Préciser ceux qui sont orthogonaux.

2° Soit f_1 l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$x' = -y + 1 \qquad y' = x - 1$$

i. Démontrer que f_1 est une rotation affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$. Préciser le centre A et l'angle de f_1.

ii. Soit (Γ) le cercle de centre $B(0,1)$ et de rayon 1. Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par f_1.

iii. Soit I le milieu du segment $[M, M']$. Déterminer l'ensemble décrit par I lorsque M décrit (Γ). (On pourra calculer les coordonnées de I ou définir géométriquement une application par la quelle I est image de M).

3° Soit f_2 l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point $M'(x', y')$ telle que :

$$x' = -x + 2y + 1 \qquad y' = -x + y + 1$$

1° Démontrer que f_2 est une application affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$.

2° Quel est l'ensemble des points invariants ?

3° Par quelle transformation passe-t-on de M à $M'' = f_2 \circ f_2(M)$?

4° Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre :

$$y = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3}$$

Etudier cette fonction et la représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle (C) la représentation graphique.

5° Déterminer l'image (C') de (C) par f_2. Tracer la dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ après avoir reconnu cette courbe (C').

N.B.- Les parties A,B,C peuvent être traitées de façon indépendante.

VI. Besançon Dijon Nancy & Strasbourg, série E

Ex. 283. ./1976/besançonE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = z^2 + z + 1$$

1° L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ invariants par f ? Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ dont l'image par f est un réel ?

2° Dans le plan affine euclidien, on note A le point d'affixe 1, et au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $f(z) = 1 + z + z^2$.
Pour quels points M les trois points A, M, M' sont-ils alignés ?

Ex. 284. ./1976/besançonE/exo-2/texte.tex

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1° Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.

2° Montrer que f est la fonction dérivée de la fonction F :

$$F(x) = \log(e^x + e^{-x} + 2)$$

En déduire l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Calculer à l'aide des tables une valeur approchée de cette intégrale.

✰Problème 76

./1976/besançonE/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées, d'ordre 2, à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de leur multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire.

On notera I la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Ω la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient alors les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice $m = aA + bB$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$, m décrit un ensemble $\mathcal{A}$ de matrices.

I- Dans le plan vectoriel euclidien, on associe à la matrice m, relative à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, l'endomorphisme φ.

1° Montrer que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\{A,\ B\}$ en est une base.

2° Calculer les matrices $A^2, B^2, AB, BA, A+B, A-B$.

Montrer que les endomorphismes φ associés aux matrices A et B sont des projections vectorielles orthogonales ; préciser celles-ci. Quels sont les endomorphismes associés aux matrices $A+B$ et $A-B$?

3° Soit deux matrices de $\mathcal{A}$:

$$m = aA + bB \qquad m' = a'A + b'B$$

Calculer mm' et montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire. A quelle condition une matrice m est-elle inversible ?

II- Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application affine f associée à l'endomorphisme φ, dont la matrices relative à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $m = aA + B$, a étant un réel non nul, et telle que le point O soit invariant par f.

1° Montrer que f est une bijection.

2° Montrer que si $a \neq 1$, l'ensemble des points M invariants par f est une droite Δ qu'on définira par une équation.

3° Montrer que si $M \neq M'$, $M' = f(M)$, la droite (MM') est orthogonale à la droite Δ.

4° Soit H la projection orthogonale du point M sur Δ. Montrer que $\overrightarrow{HM'}$ s'exprime aisément à l'aide de $\overrightarrow{HM}$.

III- 1° Etudier les variations de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{16 - x^2}$$

2° Soit E sa courbe représentative dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine définie à la deuxième partie et correspondant à la valeur $a = -4$.

Si M' est le point de coordonnées x' et $y' = g(x')$, ce point est l'image par f du point M de coordonnées $(x,\ y)$. Montrer que le point M appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon. De quelle partie C de ce cercle la courbe E est-elle l'image ?

3° Vérifier que les tangentes aux courbes C et E en leurs extrémités homologues par f se coupent sur la droite Δ. (définie au **??**. de III.).

Montre que les courbes C et E ont un seul point commun, que ce point appartient à Δ et que les deux courbes admettent la même tangente en ce point.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité sera le centimètre, tracer soigneusement les courbes C et E, la droite Δ ainsi que les tangentes signalées. (on pourra prendre $\sqrt{13} \simeq 3,61$ et $\sqrt{5} \simeq 2,24$).

Retour page 1

VII. Bordeaux , série C

✻ Ex. 285. ./1976/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Rechercher tous les couples $(z_1,\ z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$z_1 z_2 = 1/2 \qquad z_1 + 2z_2 = \sqrt{3}$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

✻ Ex. 286. ./1976/bordeauxC/exo-2/texte.tex

1° a) Montrer que la fonction numérique : $f : x \mapsto x \log x - x$ est dérivables sur $]0;+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Soit t un élément quelconque de l'intervalle réel $]0;1]$. Montrer que la fonction : $x \mapsto \log x$ est intégrable sur $[t\,;1]$. Calculer :

$$I(t) = \int_t^1 \log x dx$$

Montrer que la fonction : $t \mapsto I(t)$ admet une limite finie quand t tend vers zéro par valeurs positives. Que vaut cette limite ?

2° Soit T un élément quelconque de l'intervalle réel $[1;+\infty[$. Montrer que la fonction : $x \mapsto \log x/x^2$ est intégrable sur $[1\,;T]$. Calculer :

$$J(T) = \int_1^T \frac{\log x}{x^2} dx$$

(On peut faire une intégration par parties).

Montrer que la fonction : $T \mapsto J(T)$ admet une limite finie quand T tend vers $+\infty$, que vaut cette limite ?

✫Problème 77 ./1976/bordeauxC/pb/texte

-I- Soit a un nombre réel donné non nul. Soit A l'ensemble des applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en tout point, et satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$ à la condition :

$$\varphi'(t) = a\varphi(t)$$

a) Montrer que la fonction $\varphi_a : t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ appartient à A.

b) Soit φ un élément quelconque de A. Quelle est l'application dérivée de la fonction $h = \varphi/\varphi_a$? En déduire que φ est de la forme $k\varphi_a$ où k est un nombre réel.

-II- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension trois. Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base fixée de E. Soit $\vec{u}$ l'application linéaire de E dans E telle que :

$$u(\vec{i}) = -\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{k} \qquad u(\vec{j}) = \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k} \qquad u(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$$

a) Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de E. Soit x_1, x_2, x_3 les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B. Quelles sont les coordonnées dans B du vecteur $u(\vec{v})$?

b) Montrer que le noyau de u, noté $\ker(u)$, est le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur

$$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$$

c) Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$ est le sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\vec{v}_2 = (2 - \sqrt{2})\,\vec{i} + (2 + \sqrt{j})\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

d) On note $Im(u)$ l'image de E par u. Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de E. Montrer que $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $Im(u)$. En déduire que $\ker(u)$ et $Im(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Dans III et IV, en plus des hypothèses de II, on suppose que E est un espace vectoriel euclidien, et que $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en est une base orthonormée.

-III- a) Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont deux à deux orthogonaux.

b) En utilisant la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, donner une interprétation géométrique de l'application linéaire u.

-IV- On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E. Si $\vec{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\vec{F}(t)$ est donc un vecteur de E. On note $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base B, et $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

On rappelle que dire que la fonction vectorielle $\vec{F}$ est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ revient à dire que chaque fonction numérique f_1, f_2, f_3 est dérivable en t_0, ou encore que chaque fonction numérique $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ est dérivable en t_0. On a alors :

$$\vec{F}'(t_0) = f_1'(t_0)\vec{i} + f_2'(t_0)\vec{j} + f_3'(t_0)\vec{k} = \varphi_1'(t_0)\vec{v}_1 + \varphi_2'(t_0)\vec{v}_2 + \varphi_3'(t_0)\vec{v}_3$$

a) Soit $\mathcal{F}_u$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles $\vec{F} \in \mathcal{F}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation ($\star$) :

$$\vec{F}'(t) = u[\vec{F}(t)]$$

i. Soit $\vec{F} \in \mathcal{F}_u$. Comment se traduit la relation ($\star$) sur les coordonnées $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ de $\vec{F}(t)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$?

ii. En déduire, en utilisant I, la forme des fonctions numériques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

b) Rechercher toutes les fonctions numériques f_1, f_2, f_3 définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f_1'(t) = -\sqrt{2}f_1(t) & +0 & +f_3(t) \\ f_2'(t) = \quad 0 & +\sqrt{2}f_2(t) & +f_3(t) \\ f_3'(t) = \quad f_1(t) & +0 & +f_3(t) \end{cases}$$

$$f_1(0) = 5 \qquad f_2(0) = 3 \qquad f_3(0) = \sqrt{2}$$

VIII. Caen, série C

Ex. 287. ./1976/caenC/exo-1/texte.tex

On considère l'équation :

$$324x - 245y = 7 \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \tag{1}$$

1° Montrer que pour toute solution (x, y), x est multiple de 7.

2° Déterminer une solution (x_0, y_0) et en déduire toutes les solutions.

3° Soit δ le PGCD des éléments d'un couple (x, y) solution de (1). Quelles sont les valeurs possibles de δ ? Déterminer les solutions de (1) telles que x et y soient premiers entre eux.

Ex. 288. ./1976/caenC/exo-2/texte.tex

Le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé. Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan.

1° Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$|(1-i)z + 2i| = 2$$

2° Étudier la transformation de $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1-i)z + 2i$.

3° En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de **??**.

☆Problème 78 ./1976/caenC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de ce plan.

-I- Construire la courbe Γ d'équation :

$$4y^2 - x^2 = 4$$

-II- On donne les points :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \qquad A'\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \qquad B'\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

Retour page 1

1° Montrer qu'il existe une bijection affine unique g telle que :

$$g(O) = B \qquad g(A) = A' \qquad g(B) = B'$$

Soit C le symétrique de B par rapport à A. Définir sans calcul le point $C' = g(C)$ et les images de g des droites OB et OC.

2° Déterminer les coordonnées de A' dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire un système de coefficients réels (α, β, γ) tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et que A' soit barycentre des points (O, A, B) affectés des coefficients respectifs (α, β, γ).

3° Donner la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de l'endomorphisme f associé à g et l'expression analytique de g. Donner les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du barycentre des points B, A', B' affectés respectivement des coefficients (α, β, γ).

4° Montrer que l'équation cartésienne de la courbe Γ' image de Γ par g est :

$$y = \frac{3}{2}x + 4 + \frac{1}{2(x+2)}$$

Construire cette courbe, montrer que $B'C'$ est tangente à Γ' et préciser le point de contact.

-III- Soit D la droite d'équation $x = -2$ et D' la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 4$.

1° Définir analytiquement la symétrie S par rapport à D suivant D'.

2° Montrer que l'application $g^{-1} \circ S \circ g$ est une involution affine. Trouver $g^{-1} \circ S \circ g(O), g^{-1} \circ S \circ g(B), g^{-1} \circ S \circ g(C)$ et en déduire la nature de $g^{-1} \circ S \circ g$.

-IV- On considère la partie de $\mathcal{P}$ limitée par la courbe Γ', la droite D', les droites d'équation $x = -3$ et $x = m$, m étant un paramètre réel inférieur strictement à -2.

1° Calculer l'aire arithmétique $\Sigma(m)$ de ce domaine.

2° Étudier la fonction $\Sigma :]-\infty; -2[\to \mathbb{R}$ qui à m associe $\Sigma(m)$ et construire sa courbe représentative.

3° Soit h l'application $[-3; -2[\to \mathbb{R}^+$ qui à x associe :

$$h(x) = -\frac{1}{2}\log(-x-2).$$

Montrer que c'est une bijection et définir la bijection réciproque h^{-1}. En tracer la courbe représentative sur le même dessin que la courbe de Σ.

4° Définir la fonction $h^{-1} \circ \Sigma$.

IX. Caen, série E

✻ Ex. 289. ./1976/caenE/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z^2}{z + \mathrm{i}} \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

(i désigne le nombre complexe de carré -1).

1° On note $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $(X,\ Y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire X et Y en fonction de x et y.

2° Au complexe z, on associe le point M de coordonnées $(x,\ y)$ d'un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = 0.$$

Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Ex. 290. ./1976/caenE/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{e^x}{|e^x - 1|}$$

1° Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (On indiquera les asymptotes éventuelles).

2° Prouver que la restriction f_1 de f à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ admet une application réciproque que l'on déterminera.

3° a) Calculer le réel $I(\alpha)$ défini par :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(α réel strictement positif).

b) Étudier la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Problème 79

./1976/caenE/pb/texte

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels. On rappelle que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On rappelle aussi que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices, est un anneau.

A- On considère l'ensemble F des matrices de la forme :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} b & b-a \\ -a-b & -b \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels.

1° Calculer U^2, V^2, UV, et VU où :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2° Prouver que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(U,\ V)$ en est une base.

3° Calculer $M_{a,b}^2$. En déduire le calcul de $M_{a,b}^n$. (on distinguera les cas où l'entier naturel n est pair ou impair).

B- Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soit P un plan affine associé à $\mathcal{P}$. On munit P d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ de matrice $M_{a,b}$ relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Quelle condition doit vérifier (a, b) pour que $\varphi_{a,b}$ soit un automorphisme de $\mathcal{P}$?

2° Discuter, selon les valeurs de a et b, la nature du noyau et de l'image de $\varphi_{a,b}$.

3° Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ involutifs ?

4° On considère l'endomorphisme $\varphi_{1,b}$ ($b \in \mathbb{R}$).

i. Prouver que l'ensemble des vecteurs invariants et que l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés sont deux droites vectorielles de bases respectives $\vec{I} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{J} = (1-b)\vec{\imath} + (b+1)\vec{\jmath}$.

ii. Déterminer la matrice de $\varphi_{1,b}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$. En déduire la nature de $\varphi_{1,b}$.

5° Soit f l'application affine de P dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{-1,2}$ et qui, à l'origine O du repère, associe le point A de coordonnées $(1,\ 1)$.

a) Démontrer que $f \circ f$ est la translation de vecteur $\vec{u} = 6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

b) Soit $g = f \circ t$ où t est la translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{u}$.
Démontrer que g est une application involutive possédant une droite de points invariants. Indiquer de façon précise la nature de g. Définir et construire l'image par f de la droite (D) d'équation $Y = X + 1$.

C- Dans cette partie, P désigne un plan affine euclidien et le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est supposé orthonormé.

1° Déterminer les isométries planes d'endomorphisme associé $\varphi_{a,b}$ pour lesquelles le point B de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ est invariant.

2° Parmi ces isométries, on désigne par s la symétrie d'axe parallèle à la droite d'équation $y = x$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \log|x+1| + 1$$

Déterminer l'image $s(C)$ de la courbe (C) par l'application s. Tracer $s(C)$ et (C) relativement au même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

N.B.- log désigne le logarithme népérien. Les parties A, B, C sont indépendantes.

X. Clermont, série C

Ex. 291. ./1976/clermontC/exo-1/texte.tex

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$). On considère qu'à chaque naissance, l'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{G, F\}$, G étant l'évènement "avoir un garçon" et F étant l'évènement "avoir une fille", ces deux évènements étant équiprobables. On considère que les naissances sont indépendantes les unes des autres. Pour la i-ème naissance, on construit la variable aléatoire réelle $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ telle que $X_i(G) = 1$ et $X_i(F) = 0$.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

1° Dans cette question, $n = 3$.

a) Déterminer la probabilité que, parmi ses 3 enfants, le couple ait exactement 3 garçons. Même question avec : exactement 2 garçons, exactement 1 garçon, exactement 0 garçon.

b) Construire la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

2° Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $1/100$.

Ex. 292. ./1976/clermontC/exo-2/texte.tex

A chaque nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), on associe le point $M(z)$ de coordonnées (x, y) dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Déterminer l'ensemble D des points M de P d'affixe $z = x + iy$ tels que :

$$|z - 1| = |z - (1 + \sqrt{3}) + i|$$

Représenter graphiquement D.

2° Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -iz + (3 - i)$. Déterminer géométriquement f. Déterminer l'ensemble D' image de D par f. Représenter graphiquement D'.

☆Problème 80 ./1976/clermontC/pb/texte

-A- Soient λ et μ deux nombres réels fixés, non-nuls. Pour chaque couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on définit la fonction $f_{a,b}$ par :

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f_{a,b}(x) = e^{\lambda x}(a\cos\mu x + b\sin\mu x)$$

Soit $E = \{f_{a,b} \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

I- 1° Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si l'on note $+$ l'addition des fonctions et $\bullet$ la multiplication d'une fonction par un nombre réel, on sait que $(F, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $(E, +, \bullet)$ en est un sous-espace vectoriel.

2° Démontrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base B de E.

II- a) Démontrer que $f_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée $f'_{a,b}$ appartient à E. Démontrer que l'application D définie sur E par $D(f_{a,b}) = f'_{a,b}$ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer la matrice M de D dans la base B. En déduire que D est un isomorphisme de E. Déterminer la matrice M^{-1} de D^{-1} dans la base B (on note D^{-1} l'application réciproque de D).

a) Si l'on pose $F = D^{-1}(f_{a,b})$, montrer que F est une primitive de $f_{a,b}$.

b) En déduire une primitive de la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto e^x(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)$$

Retour page 1

c) Soit C la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant le centimètre. L'unité d'aire étant le centimètre carré, déterminer l'aire géométrique S de la partie du plan comprise entre la courbe C et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \pi/4$ et $y = 0$, c'est à dire de la partie formée des points dont les coordonnées x, y vérifient :

$$0 \leq x \leq \pi/4 \qquad |y| \leq |f(x)| \qquad \text{et} \qquad y_{\bullet}f(x) \geq 0$$

On tracera succinctement l'arc de C obtenu pour $0 \leq x \leq \pi/4$.

-B- Cette partie est indépendant de la question (AII). Soit deux nombres réels strictement positifs fixés α et β. On considère l'application

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R} \qquad (f_{a,b}, f_{a',b'}) \mapsto \alpha aa' + \beta bb'$$

1° Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Pour quelles valeurs de α et β, B est-elle une base orthonormée de E muni de φ ?

Dans la suite, on choisit ces valeurs pour α et β et on oriente E de façon que B soit une base directe.

2° On fixe maintenant $\lambda = \mu = 1$.

a) Démontrer que D est le produit d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle. On déterminera ces deux applications linéaires.

b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E et rapporté à un repère (O, B). Soit d l'application affine dont l'application linéaire associée est D, et qui transforme $A(1,2)$ en $A'(1,0)$. Quelle est la nature de d ? Déterminer analytiquement d. Donner les éléments caractéristiques de d.

XI. Dijon, série C

Ex. 293. ./1976/dijonC/exo-1/texte.tex

1° Calculer en fonction de n la somme des n premiers entiers naturels non-nuls.

2° Démontrer que, pour tout entier naturel non-nul n :

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{p=n} p\right)^2$$

(Le candidat pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

Soit s la suite de terme général :

$$s_n = \sum_{p=1}^{p=n} p^3$$

Exprimer s_n en fonction de n.

3° Soit D_n le plus grand diviseur commun des nombres s_n et s_{n+1}. Calculer D_n lorsque : (a) $n = 2k$ (b) $n = 2k+1$. En déduire que pour $n > 1$, D_n est différent de 1 et que trois termes consécutifs s_n, s_{n+1}, s_{n+2} de la suite s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Ex. 294. ./1976/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. soit $\mathscr{C}$ le corps des nombres complexes. A tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$. On rappelle que i est un nombre complexe dont le carré vaut -1. Soit A le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et B le point de coordonnées $(0;1)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1° Soit S_1 la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, et dont une détermination de l'angle est $\pi/4$. Déterminer l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui, à tout nombre complexe z d'image M, associe le nombre complexe z' d'image $M' = S_1(M)$.

2° Soit A' et B' les images de A et B par S_1. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_2 et une seule qui transforme A en B' et B en A'. Préciser son centre, son rapport, et donner une détermination de son angle. (Le candidat devra faire une figure soignée).

3° De l'étude du produit $S_2^{-1} \circ S_1$, où $\circ$ représente le produit de composition des applications, déduire une expression de S_2 sous la forme $S_2 = S_1 \circ S$, l'application S étant une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

✰Problème 81

./1976/dijonC/pb/texte

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x, définies sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^\star$ des nombres réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle t, définies et continues sur $[0\,;\pi]$, ainsi que leur fonction dérivée première f'. On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

-I- 1° Calculer l'intégrale

$$I(x)=\int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

x étant un paramètre réel strictement positif, e la base des logarithmes népériens.

2° a) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x donnée par

$$g(x)=\mathrm{e}^{\pi x}-1-\pi x$$

.

Etudier le sens de variation de g. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

b) Etudier les variations de la fonction numérique I de la variable réelle x, définie pour tout réel x strictement positif par :

$$I(x)=\int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

. On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

-II- 1° a) Soit f une fonction, élément de $\mathcal{E}$. Justifier l'existence, pour tout nombre réel x strictement positif, de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}f(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Soit L l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui, à tout élément f de $\mathcal{E}$, associe la fonction F définie pour tout réel x strictement positif par :

$$F(x)=\int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que L est une application linéaire.

2° Pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, on pose :

$$L(f)=F\qquad L(f')=F^*.$$

Démontrer que la fonction F^* est définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$F^*(x)=\mathrm{e}^{-\pi x}f(\pi)-f(0)+xF(x)$$

-III- Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les trois fonctions numériques définies sur $[0\,;\pi]$ par $f_1(t)=1$, $f_2(t)=\cos 2t$ et $f_3(t)=\sin 2t$. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions numériques $af_1+bf_2+cf_3$ pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de nombres réels.

1o Démontrer que $\mathcal{E}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base B est $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.

2o On note L_1 la restriction de L à $\mathcal{E}_1$, c'est à dire l'application de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall f\in\mathcal{E}_1\qquad L_1(f)=L(f)=F$$

a) Déterminer les fonctions $F_1=L_1(f_1)$, $F_2=L_1(f_2)$ et $F_3=L_1(f_3)$.

b) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$ exprimé dans la base B. Calculer $F(x)$ pour tout nombres réel x strictement positif.

c) Démontrer que L_1 est une application injective.

3o a) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$. Justifier le fait que $f([0\,;\pi])$ est un intervalle fermé $[m\,;M]$ avec $m\le M$.

b) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$m\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x} \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x}$$

c) x étant donné égal à x_0, démontrer quil existe au moins un réel t_0 de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que :

$$F(x_0) = f(t_0)\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x_0}.$$

Calculer t_0 dans le cas particulier $f = f_1 + f_2 + f_3$ et $x_0 = 2$.

XII. Gabon, série C

Ex. 295. ./1976/gabonC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x)^{-1/x} \text{ si } x \in]-\infty;-1] \qquad f(x) = ax+b \text{ si } x \in]-1;+\infty[$$

Comment peut-on choisir les réels a et b pour que la fonction f soit :

1° continue en -1 ?

2° -2- dérivable en -1 ?

Pour les valeurs trouvées en 2., on étudiera la fonction f et l'on tracera la courbe représentative (c) de f dans un repère orthonormé du plan affine.

Ex. 296. ./1976/gabonC/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère l'application f qui au point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = (1+i\sqrt{3})\overline{z} + i$$

Démontrer que f est une similitude inverse dont on précisera le rapport k, le centre C et l'axe D.

Problème 82 ./1976/gabonC/pb/texte

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et par $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien sur E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Pour tout couple (u, b) de nombres réels, on considère l'application $f_{(u,b)}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$x' = x+u \qquad y' = -y+2b$$

1. Montrer que $f_{(u,b)}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}$.
2. Caractériser l'application $f_{(0,b)}$.
3. On se place dans le cas où u est un réel non nul. $f_{(u,b)}$ possède t-elle des points invariants ?
   Montrer que $f_{(u,b)}$ peut se décomposer en le produit d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine D et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à D. (On déterminera l'équation de D et les coordonnées de $\vec{V}$ en fonction de u et b). Cette décomposition est-elle unique ? Le produit est-il commutatif ?
4. (u, b) et (u', b') étant deux couples de nombres réels quelconques, déterminer l'application $f_{(u',b')} \circ f_{(u,b)}$. Ce produit est-il commutatif ? Déterminer l'application réciproque de $f_{(u,b)}$.
5. On considère l'ensemble P de toutes les applications $f_{(u,b)}$ quand (u, b) décrit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et l'ensemble Q de toutes les translations de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble $F = P \cup Q$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Retour page 1

B) Pour tout nombre réel φ appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et pour tout couple (u,b) de nombres réels, on considère l'application $f_{(\varphi,u,b)}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées (x',y') dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$x' = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi + u - b\sin 2\varphi$$

$$y' = x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi + 2b\cos^2\varphi + u\tan\varphi$$

1. Que peut-on dire de l'application $f_{(0,u,b)}$?
2. Pour φ différent de zéro, caractériser l'endomorphisme associé à l'application affine $f_{(\varphi,u,b)}$ en montrant que l'ensemble des vecteurs invariants par cet endomorphisme est la droite vectorielle $\mathcal{D}$ d'équation $y = x\tan\varphi$.
3. Pour $\varphi = \pi/4$, caractériser l'application $f_{(\pi/4,u,b)}$.
4. Revenant au cas général, en posant $a = \tan\varphi$, exprimer x' et y' en fonction de a, b, u. Montrer que si $u = 0$ tout point de la droite D d'équation $y = ax+b$ est invariant. En déduire la nature de l'application affine $f_{(\varphi,0,b)}$. Enfin, si u est différent de 0, montrer que $f_{(\varphi,u,b)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D d'équation $y = ax+b$ (avec $a = \tan\varphi$) et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à D.

XIII. Grenoble, série C

Ex. 297. ./1976/grenobleC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - 1.$$

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Préciser l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'axe $(O,\ \vec{i})$.

2° Montrer que la fonction f admet une bijection réciproque g. Préciser le domaine de définition et l'ensemble des valeurs de g ; expliciter cette fonction.

Ex. 298. ./1976/grenobleC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de E.
On considère l'application linéaire f de E dans lui-même définie par

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) &= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{aligned}$$

1° Déterminer le noyau de f et en donner une base.

2° Déterminer l'image P de f. On en donnera une équation cartésienne et une base.

3° On considère l'application linéaire f_1 de P dans lui-même définie par

$$\forall \vec{u} \in P, \quad f_1(\vec{u}) = f(\vec{u}).$$

Quelle est la nature de f_1 ?

☆Problème 83 ./1976/grenobleC/pb/texte

Retour page 1

XIV. Grenoble, série E

✻ Ex. 299. ./1976/grenobleE/exo-1/texte.tex

Voir exercice 293 série C Grenoble.

✻ Ex. 300. ./1976/grenobleE/exo-2/texte.tex

Voir exercice 294 série C Grenoble.

☆Problème 84 ./1976/grenobleE/pb/texte

Voir problème 83 série C - Grenoble :
Partie I : identique. Partie II : ajouter à la question 4 :
c) quelle est l'image par g d'une droite de P ?
Préciser les images des droites $(O, \overrightarrow{i})$ et $(O, \overrightarrow{j})$.
Partie III : supprimer la question 2 et la deuxième partie de la question 3.

XV. Lille, série E

✻ Ex. 301. ./1976/lilleE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. Soit P l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui à z associe :

$$P(z) = 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13\mathrm{i}$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1° x étant un réel, exprimer le complexe $P(x)$ sous la forme $u + vi$, u et v étant des réels dépendant de x. En déduire l'existence d'un réel a unique tel que $P(a) = 0$.
Montrer que pour tout complexe z, $P(z)$ s'écrit $(z-a)(pz^2+qz+r)$ où p, q, r sont trois complexes à déterminer.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
On appelle b et c les racines autres que a, b étant celle dont la partie réelle est positive.

3° Soit A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c. Déterminer les nombres réels β et γ tels que O soit le barycentre de A, B, C affectés des coefficients respectifs 10, β, γ.

✻ Ex. 302. ./1976/lilleE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ d'axes $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$. L'unité de longueur est le centimètre. O est au centre de la feuille, on choisit le plan XOY pour plan horizontal de projection et le plan YOZ pour plan frontal de projection.
L'axe $\overrightarrow{OY}$ est orienté positivement de gauche à droite. $\overrightarrow{OX}$ est dirigé vers le bas de la feuille et $\overrightarrow{OZ}$ vers le haut.
On donne le plan (P) d'équation $x + y + 2z = 6$ et le plan (Q) d'équation $2x - y + z = 6$.

1° Construire les traces du plan (P) et celles du plan (Q).

XVI. Limoges, série C

✻ Ex. 303. ./1976/limogesC/exo-1/texte.tex

Une urne contient 5 boules numérotées 10, 2, 3, 4, 5.
On tire deux boules simultanément et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

1° Quelle est la loi de probabilité de X ?

2° Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

3° Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X.

Retour page 1

✻ Ex. 304. ./1976/limogesC/exo-2/texte.tex

1° Montrer que tout réel x différent de (-1) vérifie l'égalité :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

2° Montrer que pour tout entier naturel n différent de zéro et pour tout x élément de $[0\,;1]$ on a la double inégalité :

$$(-x^n) \leqslant \frac{(-x)}{1+n} \leqslant x^n.$$

En déduire les inégalités

$$-\frac{1}{1+n} \leqslant \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1+n}$$

et la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la suite

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

XVII. Maroc, série C

✻ Ex. 305. ./1976/marocC/exo-1/texte.tex

1° Vérifier que le couple (2 ; 3) est solution de :

$$41x - 27y = 1 \qquad (x,y) \in \mathbb{N}^2$$

2° En déduire une solution particulière de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x,y) \in \mathbb{N}^2$$

3° Donner toutes les solutions de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x,y) \in \mathbb{N}^2$$

✻ Ex. 306. ./1976/marocC/exo-2/texte.tex

1° Déterminer deux constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Calculer alors :

$$J = \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$$

2° Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

✰Problème 85

./1976/marocC/pb/texte

Les parties I et II peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

I- 1° Soit E un espace vectoriel et soit φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi\circ\varphi = Id$. (Id désignant l'application identique de E dans E). Montrer que φ est bijective. Soit :

$$E^+ = \{V \in E \quad \varphi(V) = +V\} \qquad E^- = \{V \in E \quad \varphi(V) = -V\}$$

Montrer que E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels de E, et que $E^+\cap E^- = \{0\}$.
Pour chaque $V \in E$, on pose :

$$V^+ = \frac{1}{2}(V+\varphi(V)) \qquad V^- = \frac{1}{2}(V-\varphi(V))$$

Montrer que $V^+ \in E^+$ et que $V^- \in E^-$, et que $V = V^+ + V^-$. En déduire que E est somme directe des deux sous-espaces vectoriels E^+ et E^-.

2° A chaque triplet (α,β,γ) de nombres réels, on associe l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha x + \beta e^x + \gamma e^{-x}$. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les applications f obtenues quand α,β,γ parcourent $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'ensemble des trois applications :

$$x \mapsto x \qquad x \mapsto e^x \qquad x \mapsto e^{-x}$$

constitue une base de $\mathcal{F}$.

3° Soit A l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui à tout $f \in \mathcal{F}$ associe $g = A(f)$ définie par $g(x) = f(-x)$. Montrer que $A\circ A = Id$. (Id désignant l'application identique de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$). On considère l'application f_0 de $\mathcal{F}$ définie par :

$$f_0(x) = e^x$$

f_0^+ et f_0^- sont définies comme dans I-1. (E remplacé par $\mathcal{F}$, et φ remplacé par A). Déterminer f_0^+ et f_0^-. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$(f_0^+(x))^2 - (f_0^-(x))^2 = 1$$

4° Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z(t) \in \mathbb{C}$ le nombre complexe sont les parties réelle et imaginaire sont respectivement $af_0^+(t)$ et $bf_0^-(t)$, où a et b sont deux réels strictement positifs. Trouver une relation indépendante de t entre $\mathbf{Re}(z(t))$, la partie réelle de $z(t)$ et $\mathbf{Im}(z(t))$, la partie imaginaire de $z(t)$.
Soit M_t le point d'affixe $z(t)$. Démontrer que M_t appartient à une conique, indépendante de t, dont on donnera une équation.

II- Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit H l'hyperbole admettant comme équation dans ce repère :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a et b désignent des nombres réels strictement positifs donnés.
On désigne par S le groupe des similitudes du plan $\mathcal{P}$. On chercher dans cette partie à caractériser la partie $\mathcal{E}$ de S formée des similitudes s qui laissent H invariante (c'est à dire telles que $s(H) = H$).
On rappelle qu'une similitude est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même, qu'elle transforme une droite en une droite, et qu'elle multiplie les longueurs par une constante positive (rapport de similitude).

1° Faire une représentation graphique de H en plaçant ses asymptotes.

2° Soit $s \in S$. Montrer que O est point double pour s (c'est à dire que $s(O) = O$).
On pourra pour cela se servir de la caractérisation suivante du centre d'une hyperbole :
– Toute droite passant par le centre rencontre l'hyperbole en zéro ou deux points.
– Par tout point autre que le centre, il passe au moins une droite rencontrant l'hyperbole en un seul point.

3° Soit A et A' les sommets de H (c'est à dire les deux points de H situés sur la droite Ox). On pose $B = s(A)$. Montrer que la distance des deux points O et B (notée $\|\overrightarrow{OB}\|$) est au moins égale à celle de O et A (notée $\|\overrightarrow{OA}\|$). En déduire que k, le rapport de similitude de s, est au moins égal à 1.

4° Montrer que $k = 1$, et montrer que $s(A)$ est soit A, soit A'.

5° En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué par quatre éléments, qui sont :
– Id, l'application identique

Retour page 1

– S_O, la symétrie par rapport à l'origine
– S_1, la symétrie orthogonale par rapport à Ox
– S_2 la symétrie orthogonale par rapport à Oy.
Vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de S.

XVIII. Orléans Tours, série C

Ex. 307. ./1976/orleansC/exo-1/texte.tex

1° Montrer que si deux nombres sont premiers entre eux, il en est de même pour leur somme et leur produit.
2° Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système :

$$\begin{cases} x+y &= 56 \\ \text{ppcm}(x,y) &= 105 \end{cases}$$

Ex. 308. ./1976/orleansC/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E_1 des points M d'affixe z vérifiant :

$$z^2-(1+i)^2=\overline{z}^2-(1-i)^2$$

1° Déterminer et construire l'ensemble E_1.
2° Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M vérifiant :

$$[x-(1+i)]\,[\overline{z}-(1-i)]=8$$

3° Vérifier qu'il existe un point de $E_1\cap E_2$ où les deux courbes ont même tangente.

Problème 86 ./1976/orleansC/pb/texte

I- Soit E un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 2 et $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée directe de E. Pour tout réel t, on appelle φ_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est :

$$\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

a) Reconnaître φ_0 et φ_π. Montrer que φ_t est une similitude, composée de deux endomorphismes simples de E.
b) Soit f l'ensemble des endomorphismes φ_t. Montrer que F, muni de la composition des applications est isomorphe au groupe additif des réels.

II- A l'espace vectoriel euclidien orienté E, on associe un espace affine $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre réel t, on définit le point de coordonnées (x,y) telles que :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

a) *i.* Etudier, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction f qui, à t réel, associe l'abscisse de M :

$$f(t)=e^{-t}\cos t$$

ii. Comparer $f(t)$ et $f(t+2k\pi)$. $\quad k\in\mathbb{Z} \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

iii. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t)=e^{-t} \qquad v(t)=-e^{-t}$$

(C_1) et (C_2) leur courbe représentative dans un repère $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$. Déterminer $(C)\cap(C_1)$ et $(C)\cap(C_2)$ et en déduire que la fonction f n'admet pas de limite en $-\infty$.

iv. Comparer aux points de $(C)\cap(C_1)$ les tangentes à (C) et (C_1) (de même pour (C) et (C_2)).

v. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$.

vi. Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

XIX. Paris, série C

✻ Ex. 309. ./1976/parisC/exo-2/texte.tex

Une urne contient n boules ; deux boules blanches, les autres sont noires. Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages qui sont effectués donnent à chaque boule la même probabilité. On épuise l'urne en tirant les n boules, une à une, sans les remettre. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de le première boule blanche tirée.

1. Calculer la loi de X, c'est à dire, en fonction de n les diverses probabilités

$$p_k = P\{X = k\} \qquad k = 1,\ 2,\ \dots, n.$$

2. a) Calculer le rang moyen ou espérance $E(X)$ pour la loi obtenue.
   On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   b) Sachant que $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$, en déduire, par une considération de symétrie, l'espérance $E(Y)$ du rang Y de la seconde boule blanche tirée.

XX. Poitiers, série C

✻ Ex. 310. ./1976/poitiersC/exo-1/texte.tex

L'ensemble référentiel est l'ensemble $\mathbb{N}^\star$ des entiers naturels non nuls ; x est un élément de $\mathbb{N}^\star$, différent de 1 ; p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^\star$.

1° Montrer que si d est un diviseur de p, alors $x^d - 1$ est un diviseur de $x^p - 1$.

2° Montrer qu si d est le PGCD de p et de q, alors il existe m et n tels que $mp - nq = d$. En déduire que si d est le PGCD de p et de q, on peut trouver m et n vérifiant :

$$(x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1)x^d = x^d - 1$$

3° De l'égalité précédente, déduire que $x^d - 1$ est le PGCD de $x^{mp} - 1$ et de $x^{nq} - 1$.

✻ Ex. 311. ./1976/poitiersC/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on fait correspondre le complexe $z = x + iy$, appelé affixe de M et $\overline{z} = x - iy$ est l'imaginaire conjugué de z.

1° Soit f l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' dont l'affixe z' est :

$$z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z} + 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$$

Quelle est l'image $f(\omega)$ du point ω d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$?
Montrer que f est une similitude inverse dont on précisera les éléments remarquables.

2° Soit g la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite affine d'équation $y = x\sqrt{3}$. Calculer en fonction de x et y, coordonnées d'un point M, les coordonnées $(x',\ y')$ de $M' = g(M)$.

3° Déterminer $g \circ f$ et donner ses éléments remarquables.

✫**Problème 87** ./1976/poitiersC/pb/texte

A- Pour tout couple de réels (a_1, b_1), on considère la fonction φ_1 définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs de la façon suivante :

$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0\ ,\ \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$

1° On suppose dans cette question $a_1 = -b_1 = 1$.

a) Montrer que la fonction φ_1 correspondante est continue sur $\mathbb{R}^+$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? Déterminer la fonction dérivée φ_1' et la limite de cette fonction quand x tend vers 0 par valeurs positives.

b) Étudier les variations de φ_1. Construire sa courbe représentative (C_1) dans un plan rapporté à un repère orthonormé ; on précisera la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère et les points d'ordonnée nulle.

c) Montrer que la fonction φ_2 :

$$x \mapsto \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t)dt$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $\varphi_2(x)$. (on trouvera, pour x non nul, $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\log x)$).
Construire la courbe représentative (C_2) de φ_2 dans le même plan que (C_1) en précisant la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère, les points d'ordonnée nulle.

2° On suppose maintenant a_1 et b_1 réels quelconques.

a) Etudier brièvement la continuité et la dérivabilité de la fonction φ_1 associée.

$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ , \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$

b) Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble des entiers naturels non nuls une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ , \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$

$$\forall n > 1 \ , \ \forall x \geq 0 \ , \ \varphi_n(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}(t)dt$$

Vérifier qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \log x)$$

Former des relations de récurrence concernant les couples $(a_n,\ b_n)$ et $(a_{n-1},\ b_{n-1})$. Étudier la suite b. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $t_n = n!a_n$. Former une relation de récurrence satisfaite par t_n et t_{n-1}. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que :

$$\forall n \geq 1 \ , \ |t_n| \leq A + B \log n$$

(on pourra montrer que, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 ; on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log n$). Étudier alors la convergence de la suite a.

B- A tout couple $(a,\ b)$ de réels, à tout entier naturel non nul p, on associe l'application φ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = x^p(a + b \log x)$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note E_p l'ensemble décrit par φ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que si p est différent de 1, E_p est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$. Examiner le cas de $p = 1$.
On supposera dans la suite du problème $p \neq 1$.

2° Montrer que les éléments de E_p, notée u et v, obtenus respectivement en donnant à (a, b) les valeurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une base de E_p.

3° Soit f l'application qui, à tout élément φ de E_p, associe la fonction numérique $f(\varphi)$, notée g, définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = x.\varphi'(x)$. Démontrer que f est un endomorphisme de E_p. Déterminer la matrice de f dans la base (u, v). L'application f est-elle un automorphisme de E_p ?

4° k étant un réel donné, on appelle F_k l'ensemble des éléments φ de E_p tels que $f(\varphi) = k.\varphi$. Déterminer F_k et discuter suivant les valeurs de k.

5° Démontrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que, pour tout élément φ de E_p,

$$(f \circ f)(\varphi) + \lambda f(\varphi) + \mu.\varphi$$

soit l'application nulle.

Retour page 1

XXI. Reims, série C

✻ Ex. 312. ./1976/reimsC/exo-1/texte.tex

On pose :

$$I(a,n) = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \qquad a \in \mathbb{N}^\star \qquad n \in \mathbb{N}^\star \qquad I(a,0) = \int_0^1 x^n dx$$

1° En intégrant par parties, montrer que :

$$I(a+1,n) = \frac{a+1}{n+1} I(a,n+1)$$

2° Établir que $I(a,n) - I(a,n+1) = I(a+1,n)$. En déduire que :

$$I(a,n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a,n)$$

3° a étant fixé ($a \in \mathbb{N}^\star$), calculer $I(a,0)$ et démontrer par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$I(a,n) = \frac{1.2.3.\dots.(n-1).n}{(a+1).(a+2).\dots.(a+n+1)}$$

✻ Ex. 313. ./1976/reimsC/exo-2/texte.tex

En base 9, trouver tous les couples de chiffres $(x,\ y)$ pour lesquels le nombre $\overline{7x6y4}$ est divisible par 7 et par 8. (On pourra utiliser le système décimal comme intermédiaire).

☆Problème 88 ./1976/reimsC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I- On donne un point Ω de $\mathcal{P}$ et un nombre réel k strictement positif. Soit f l'application de $\mathcal{P} - \{\Omega\}$ dans $\mathcal{P} - \{\Omega\}$ définie par :

$$m \mapsto M = f(m) \qquad \text{tel que } \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|^2}.\overrightarrow{\Omega M}$$

1° Etablir que $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \dfrac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|}$ et que f est une application involutive de $\mathcal{P} - \{\Omega\}$ dans $\mathcal{P} - \{\Omega\}$.

2° a) Quelle est l'image par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?

b) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?

3° $\mathcal{P}$ est considéré comme plan complexe. Tout point $m(x,\ y)$ de $\mathcal{P}$ a pour affixe $z = x + iy$; on note α l'affixe de Ω et Z l'affixe de M, image de m par f. Établir la relation :

$$Z = \alpha + \frac{k}{\overline{z - \alpha}}. \tag{1}$$

II- On appelle f' l'application associée à la relation $Z - 1 = \dfrac{k}{\overline{z} - 1}$

et f_1 celle associée à la relation $Z - 1 - b = \dfrac{b\overline{b}}{\overline{z - 1 - b}}$ où b et $\overline{b}$ sont deux nombres complexes conjugués ($b \neq 0$).

1° a) Sur quel ensemble E_1 la composée $\varphi_1 = f' \circ (f_1 \circ f')$ est-elle définie ?

b) Établir la relation entre les affixes de m et de son image par $f_1 \circ f'$, en déduire que la relation entre les affixes de m et de son image M_1 par φ_1 est :

$$Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}} \overline{z}. \tag{2}$$

2° On pose désormais $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$

a) En utilisant la relation (2), montrer que φ_1 est alors la restriction à E_1 d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite Δ_1 passant par O. On appelle D la droite $(O, \vec{u})$, déterminer l'angle (D, Δ_1).

Retour page 1

b) On appelle f_2 l'application associée à la relation :

$$Z-1-\overline{b}=\frac{b\overline{b}}{\overline{\overline{z-1-\overline{b}}}}$$

et φ_2 la composée $\varphi_2 = f' \circ (f_2 \circ f')$. Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2 d'une symétrie orthogonale S_2 par rapport à une droite Δ_2 que l'on précisera.

c) Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application R.

Quelles valeurs doit-on donner à θ pour que R soit associée à la relation $Z = z(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)$?

3° Soit les applications définies dans $E' = \mathcal{P} - \{O\}$ par :

$$f_1' \ : \ z \mapsto \frac{1}{z} \qquad f_2' \ : \ z \mapsto \frac{1-k}{\overline{z}}$$

a) Montrer que la composée $h = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à E' d'une homothétie que l'on précisera.

b) Quel est l'ensemble de définition de $h \circ R$?

Montrer que l'application $h \circ R$ est associée à la relation :

$$Z = (1-k)(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)z \tag{3}$$

pour un choix convenable de R.

4° On appelle σ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (3). Déterminer la nature de σ et ses éléments remarquables ; discuter selon les valeurs de θ.

XXII. Rennes, série C

Ex. 314. ./1976/rennesC/exo-1/texte.tex

Le symbole log désignant la fonction logarithme népérien, soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x - 1 - (e^x-1)\log|e^x-1| \text{ si } x \neq 0 \qquad f(0) = 0$$

1° Montrer que f est continue en 0.

2° Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

Ex. 315. ./1976/rennesC/exo-2/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $143x - 100y = 1$ en remarquant que $(7;10)$ est solution.

2° Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que

$$10^{6p} + 10^{3p} - 2 \equiv 0 \pmod{143}$$

☆Problème 89 ./1976/rennesC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de $\mathcal{P}$.

D_1 et D_1' les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

D_2 et D_2' les droites passant par O et dont les coefficients directeurs respectifs sont les réels distincts m et m'.

On dit qu'une application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ échange deux droites D et D' si et seulement si

$$f(D) = D' \text{ et } f(D') = D$$

I- On désigne par :

– S_1 la symétrie affine par rapport à D_1 parallèlement à D_1'

– S_1' la symétrie affine par rapport à D_1' parallèlement à D_1

– S_2 la symétrie affine par rapport à D_2 parallèlement à D_2'

– S'_2 la symétrie affine par rapport à D'_2 parallèlement à D_2
– S_O la symétrie de centre O
– Id l'application identique dans $\mathcal{P}$.

1° Soit E l'ensemble ayant pour éléments Id, S_O, S_1, S'_1. Démontrer que E muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

2° Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et m' pour que la transformée de D_2 par S_1 soit D'_2. Montrer qu'alors D_1 et S'_1 échangent D_2 et D'_2 et vérifier (par exemple par un calcul) que S_2 et S'_2 échangent D_1 et D'_1.

II-

1° Soit S une symétrie affine échangeant D_1 et D'_1. Quelle est l'image de O par S ? Démontrer qu'il existe un réel a non nul tel que pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, son image $M'(x', y')$ soit définie par :

$$x' = \frac{1}{a}y \qquad y' = ax$$

Démontrer que S échange D_2 et D'_2 si et seulement si : $mm' = a^2$.

2° Montrer que si m et m' sont non nuls et de même signe, il existe deux symétries affines et deux seulement, L et L', qui échangent D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part. Montrer que :

$$L \circ L' = L' \circ L = S_O$$

III- On suppose dans cette partie que : $m' > m > 0$.
On désigne toujours par L et L' les symétries échangeant D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part.

1° En utilisant II-2. et un repère convenable, démontrer qu'il existe deux symétries affines et deux seulement, Σ et Σ', qui échangent D_1 et D_2 d'une part, D'_1 et D'_2 d'autre part.
On appellera Δ l'axe de Σ, et Δ' l'axe de Σ'.

2° On pose :

$$T = L \circ \Sigma \circ L$$

a) Démontrer que T est la symétrie par rapport à la droite $L(\Delta)$ (transformée de Δ par L) parallèlement à la droite $L(\Delta')$ (transformée de Δ' par L).

b) Quelles sont les images par T des droites D_1 et D'_1 ?

c) Démontrer que L échange Δ et Δ'.

XXIII. Rouen, série C

❊ Ex. 316. ./1976/rouenC/exo-1/texte.tex

k étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \qquad y = 9k + 4$$

Montrer que tout diviseur commun à x et à y divise 17. En déduire, suivant les valeurs de k, le plus grand diviseur commun de x et y.

❊ Ex. 317. ./1976/rouenC/exo-2/texte.tex

1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système :

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 = 1 - 6i \\ z_1 + 2iz_2 = i \end{cases}$$

2° Dans un plan affine euclidien orienté identifié au plan complexe, déterminer les rotations de mesure $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transformant le point m_1 d'affixe z_1 en le point m_2 d'affixe z_2.

☆Problème 90 ./1976/rouenC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications $f \in \mathcal{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul n, une dérive d'ordre n notée $f^{(n)}$ (ou f' pour $n=1$, et f'' pour $n=2$, ...).

I- 1° a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) On considère l'ensemble E des applications de $\mathcal{A}$ définies par :

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Établir que E est un espace vectoriel de base $(f_{1,0}; f_{0,1})$ tel que :

$$\forall f_{a,b} \in E \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$$

2° Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application ϕ_n dans $\mathcal{A}$ qui à $f_{a,b} \in E$ associe $f_{a,b}^{(n)}$ est un endomorphisme de E ; en donner la matrice dans la base $(f_{1,0}; f_{0,1})$. En déduire que :

a) Pour n pair, ϕ_n est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.

b) Pour n impair, ϕ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle qu'on précisera.

3° a) Montrer que P, ensemble des fonctions paires de E, et J, ensemble des fonctions impaires de E, sont deux droites vectorielles de E de base respective $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$ telles que $E = P \oplus J$. (P et J supplémentaires dans E).

b) Etudier les variations des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$. Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé. Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; définir sa bijection réciproque.

On pose, pour f et g de $\mathcal{D}$:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

II- 1° a) Établir que :

$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{D}^3 \qquad (f+g)*h = (f*h)+(g*h)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \forall (f,g) \in \mathcal{D}^2 \qquad (\alpha f)*g = \alpha(f*g)$$

b) A étant l'élément de $\mathcal{D}$ défini par $A(x) = 2x^2 - 1$, calculer $(f_(1,0 * A)(x)$ et $(f_{0,1} * A)(x)$. (on pourra intégrer par parties).

2° Déduire du II1. que l'application $\phi \ : \ f \in \mathcal{D} \mapsto f * A \in \mathcal{A}$ est linéaire et que l'image $\phi(E)$ de E par ϕ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

XXIV. Strasbourg, série C

✻ Ex. 318. ./1976/strasbourgC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \left|e^{4x} - 2e^{2x}\right|$$

(on désigne par e la base de la fonction logarithme népérien notée log).

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2° Donner la définition de la dérivabilité en x_0 d'une fonction numérique d'une variable réelle.

Application : la fonction f est-elle dérivable en $x_0 = \dfrac{1}{2}\log 2$?

3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

✻ Ex. 319. ./1976/strasbourgC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z+3\overline{z}=(2+i\sqrt{3}).|z|$$

Représenter les images des solutions de cette équation dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct.

✰Problème 91

./1976/strasbourgC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel, I l'application identique de $\mathcal{P}$ et ω l'application nulle de $\mathcal{P}$.

$$I:\mathcal{P}\to\mathcal{P}\quad \vec{u}\mapsto\vec{u}\qquad \omega:\mathcal{P}\to\mathcal{P}\quad \vec{u}\mapsto\vec{0}$$

Préliminaires : pour cette seule question $\mathcal{P}$ est euclidien orienté et muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j})$. Soit g la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est θ.

(a) Ecrire la matrice de g dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

(b) Démontrer que $g\circ g-(2\cos\theta)g+I=\omega$.

On se propose d'étudier tous les endomorphismes f de $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$f\circ f-(2\cos\theta)f+I=\omega \tag{1}$$

où θ est un réel donné de l'intervalle $[0;2\pi[$. Soit f une solution de (1).

1° Chercher le noyau de f et montrer que f est une application bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

2° Démontrer que si f est involutive, alors $f=(\cos\theta)I$. En déduire les valeurs de θ pour lesquelles (1) admet des solutions involutives et donner ces solutions.

3° On suppose θ différent de 0 et de π. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ défini par :

$$\vec{v}=\frac{1}{\sin\theta}[-(\cos\theta)\vec{u}+f(\vec{u})] \tag{2}$$

a) Montrer que pour tout réel k, le noyau de $f-kI$ est égal à $\{\vec{0}\}$. En déduire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ et que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.

b) En utilisant (2) déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Est-il possible de conclure que f est une rotation vectorielle ?

c) Soit φ l'application de $\mathcal{P}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple $(\vec{w},\vec{w}')$ de $\mathcal{P}^2$ tel que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ et $\vec{w}'=x'\vec{u}+y'\vec{v}$, associe le réel $xx'+yy'$.
Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}$. Vérifier que pour ce produit scalaire, la base $(\vec{u},\vec{v})$ est orthonormée. $\mathcal{P}$ étant muni de ce produit scalaire et de la base $(\vec{u},\vec{v})$ supposée directe, quelle est la nature de f ?

4° On suppose $\theta=0$.

a) Vérifier que (1) est alors équivalente à :

$$(f-I)\circ(f-I)=\omega \tag{3}$$

f étant une solution de (3), démontrer que le noyau de $f-I$ n'est pas $\{\vec{0}\}$.

b) $\vec{u}$ étant un vecteur non nul du noyau de $f-I$, soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base de $\mathcal{P}$. La matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&\mu\end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels. Montrer que $\mu=1$.

c) Si f est solution de (3) différente de I, vérifier que $f-I=s\circ h\circ p$ où p est la projection sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$, de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$, h l'homothétie vectorielle de rapport λ et s une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

d) On définit, pour tout entier naturel n, f^n par :

$$f^0=I\qquad \forall n\geq 1\quad f^n=f^{n-1}\circ f$$

Déterminer la matrice de f^n dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

N.B : Les questions 1,2,3,4 sont indépendantes entre elles et indépendantes des préliminaires.

XXV. Tel Aviv, série C

Ex. 320. ./1976/telavivC/exo-1/texte.tex

F désigne l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \cdot\, 2,\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}$.
Déterminer $(\alpha,\ \beta) \in F^2$ de façon qu'il existe $(a,\ b,\ c) \in F^3$ tel que :

$$\forall x \in F \qquad \dot{1}\ x^4 + \dot{3}\ x^3 + \dot{5}\ x^2 + \alpha x + \beta = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Ex. 321. ./1976/telavivC/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, on donne une droite D et deux points distincts F et A, symétriques par rapport à D. On désigne par $\mathscr{H}$ l(hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et D pour directrice associée à F.

1° Montrer que A est un sommet de $\mathscr{H}$. Déterminer l'autre sommet A' et le centre Ω, en calculant $\dfrac{\overline{\text{AA'}}}{\overline{\text{AF}}}$ et $\dfrac{\overline{\text{A}\Omega}}{\overline{\text{AF}}}$. Construire $\mathscr{H}$.

2° Soit C le cercle centré en un point O de D, et passant par F. On se propose de montrer que : C∩ H={A, M_1, M_2, M_3} où M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On rapporte le plan à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, choisi de façon que $(O; \vec{\imath})$ soit un repère de D. Á chaque point du plan correspond ainsi son affixe $z = x + \mathrm{i}y$; on désigne par a l'affixe de F.

Montrer que C et $\mathscr{H}$ sont les ensembles des points du plan dont les affixes vérifient respectivement :

$$(C) \quad z\overline{z} = a\overline{a}\ ; \qquad (\mathscr{H})(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) + (z-\overline{z})^2 = 0.$$

En déduire que C∩$\mathscr{H}$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes vérifient une équation de la forme :

$$(z-\overline{a})(z^3-k) = 0$$

où k est un nombre complexe dont on exprimera le module et l'argument en fonction du module r et de l'argument φ de a. Conclure.

☆Problème 92 ./1976/telavivC/pb/texte

On note $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Á tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on associe l'ensemble D_n des $d \in \mathbb{N}^\star$ qui divisent n, l'ensemble C_n des $(d_1,\ d_2) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tels que $d_1 d_2 = n$, et l'ensemble Γ_n des $(d_1,\ d_2,\ d_3) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ tels que $d_1 d_2 d_3 = n$.
Le p.g.c.d. des entiers m et n est noté $m \wedge n$.

Partie I

Dans tout le problème, on appelle suite une application de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{U}$ l'ensemble des suites.
On admet que l'on dispose du groupe $(\mathscr{U},\ +)$, la loi $(+)$ étant définie par :

$$\forall (u,\ v) \in \mathscr{U}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad (u+v)(n) = u(n) + v(n).$$

On définit la loi interne (T) sur $\mathscr{U}$ par :

$$\forall (u,\ v) \in \mathscr{U}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad (uTv) = \sum_{d \in D_n} u(d).v\left(\frac{n}{d}\right)$$

c'est ainsi que : $(uTv)(4) = u(1)v(4) + u(2)v(2) + u(4)v(1)$.

1. Vérifier que, pour tout $(u,\ v,\ w) \in \mathscr{U}^3$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$(uTv)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2) \in C_n} u(d_1).v(d_2)$$

et

$$((uTv)Tw)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2,\ d_3) \in \Gamma_n} u(d_1).v(d_2).w(d_3).$$

Quelles propriétés de la loi (T) découlent de ce résultat (que l'on pourra admettre, à défaut de démonstration) ?

Retour page 1

2. La loi (T) admet-elle un élément neutre ? Le triplet $(\mathscr{U}, +, T)$ est-il un anneau ?

Partie II

Une suite $u \in \mathscr{U}$ est dite régulière si et seulement si elle vérifie :
$u(1) = 1$; $u(qq') = u(q)u(q')$ pour tout $(q, q') \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tel que $q \wedge q' = 1$.

1. Démontrer que sont régulières les suites θ, ψ et f_m définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \theta(n) = 1 \; ; \quad \psi(n) = n \; ; \quad f_m(n) = m \wedge n$$

(où $m \in \mathbb{N}^\star$ est donné).

2. Soit u une suite régulière. Vérifier que $u(q_1,\dots,q_k) = \prod_{i=1}^{k} u(q_i)$, pour tout $(q_1, \dots, q_k) \in (\mathbb{N}^\star)^k$ tel que $q_1, \dots, q_k$ soient premiers entre eux deux à deux.

Exprimer $u(n)$ pour $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, avec $(p_1, \dots, p_k \in (\mathbb{P})^k$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^\star)^k$.

Partie III

1. Montrer que si les suites u et v sont régulières, alors la suite uTv est régulière.
2. Á $n \in \mathbb{N}^\star$, on associe le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^\star$ et la somme $\sigma(n)$ de ces diviseurs.
Montrer qu'il existe deux suites régulières u_1 et u_2 telles que $\nu = \theta T u_1$ et $\sigma = \theta T u_2$.
En déduire que les suites ν et σ sont régulières. Les notations étant celles de 2, donner des expressions de $\nu(n)$ et $\sigma(n)$.
En particulier, calculer $\nu(700)$ et $\sigma(700)$.
3. Montrer qu'est régulière la suite λ définie par :

$$\begin{cases} \lambda(1) = 1 \; ; \; \lambda(n) = 0 \text{ si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ \lambda(n) = (-1)^k \; ; \text{ si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers deux à deux distincts.} \end{cases}$$

Déterminer l'image de $n \in \mathbb{N}^\star$ pour chacune des suites :

$$\lambda T \theta \; ; \; \lambda T \nu \; ; \; \lambda T \sigma \; ; \; \lambda T \lambda.$$

XXVI. Toulouse, série C

Ex. 322. ./1976/toulouseC/exo-1/texte.tex

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}.$$

1° Étudier les variations de f et construire son graphique dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2° Soit g la restriction de f à $I = \left]\frac{1}{e}\, ; +\infty\right[$.

a) Démontrer que g est une bijection de I sur $g(I) =]0\, ; +\infty[$.

b) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g ; calculer $g(\mathrm{e})$ et la dérivée de g^{-1} au point $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

✻ Ex. 323. ./1976/toulouseC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel de dimension trois et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{V}$. On considère l'application linéaire φ de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\vec{u}\,'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ telles que

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 2x + 2y - z \\ z' = 4x + 2y - z \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des vecteurs invariants par φ et indiquer une base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ de $\mathscr{P}$.

2° Soit $\mathscr{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

a) Démontrer que la restriction de φ à $\mathscr{D}$ est une homothétie vectorielle de $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ peut être décomposé d'une manière unique en $\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{u}\,''$, $\vec{u}\,' \in \mathscr{P}$, $\vec{u}\,'' \in \mathscr{D}$.

c) Établir que :

$$(\forall \vec{u} \in \mathscr{V}) \qquad \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\,' + 2\vec{u}\,'' = \vec{u} + \vec{u}\,''.$$

3° Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à $\mathscr{V}$ et $(O, (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3))$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ étant les vecteurs définis précédemment.

On considère l'application affine f qui laisse le point O invariant et dont l'endomorphisme associé est φ.

Si M' est l'image par f du point M de $\mathscr{E}$, en utilisant ce qui précède, exprimer dans le repère choisi les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

Indiquer une construction géométrique de M'.

✩Problème 93 ./1976/toulouseC/pb/texte

Une suite réelle f application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ donne de n l'image $f(n)$ notée f_n.
Soit a et α deux réels fixés vérifiant : $a \neq 0$ et $0 \leq \alpha < \pi$. On considère l'ensemble F des suites f qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_{n+2} = (2a\cos\alpha) f_{n+1} - a^2 f_n$$

1° *On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$.*
Démontrer que les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n \cos n\alpha \qquad v_n = a^n \sin n\alpha$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: (u_0, u_1) et (v_0, v_1) sont indépendants.

2° *On suppose dans cette question que $\alpha = 0$.*
Démontrer que les suites r et s définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad r_n = a^n \qquad s_n = na^n$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: (r_0, r_1) et (s_0, s_1) sont indépendants.

3° a) Etablir que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$, espace vectoriel des suites réelles.

b) Démontrer que f est déterminée par la donnée du couple $(f_0,\ f_1)$ et en déduire que l'application φ de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(f) = (f_0,\ f_1)$ est bijective.

c) Démontrer que φ est une application linéaire. Quelle est la dimension de F ? On rappelle que, compte-tenu de la notation f_n,

$$(f+g)(n) = f_n + g_n \qquad (kf)(n) = kf_n \qquad k \in \mathbb{R}$$

4° Soit φ^{-1} l'application réciproque de φ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans F. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^2$, alors $\varphi^{-1}(W_1)$ et $\varphi^{-1}(W_2)$ sont deux vecteurs de F indépendants.
En déduire que si $\alpha \neq 0$, (u, v) est une base de F, et que si $\alpha = 0$, (r, s) est une base de F. Indiquer dans les deux cas une forme générale des éléments de F.

5° Soit b un réel fixé non nul. On considère l'ensemble C des suites réelles c telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_{n+2} - (2a\cos\alpha)c_{n+1} + a^2 c_n = b^n$$

Retour page 1

a) Si $\alpha = 0$ et $b = a$, démontrer qu'il existe un réel λ tel que la suite t définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n = \lambda n^2 a^n$$

appartient à C.

b) Si $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$, démontrer qu'il existe un réel μ tel que la suite t' définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t'_n = \mu b^n$$

appartient à C.

c) L'ensemble C est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

6° Si $\alpha = 0$ et $b = a$, c appartenant à C, démontrer que la suite de terme général $(c_n - t_n)$ est un élément de F ; inversement, si f appartient à F, montrer que la suite de terme général $(f_n + t_n)$ appartient à C. En déduire une forme générale des élements de C.

7° Déterminer de même une forme générale des éléments de C lorsque $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$.

Chapitre 17

1977.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

✻ Ex. 324. ———— *4 points.* *./1977/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

1° Établir que : quel que soit $(a,\ b,\ q) \in \mathbb{Z}^3$, $a \wedge b = b \wedge a - bq$.
La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b.

2° Montrer que :
quelque soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = n + 2 \wedge 38).$$

3° Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $5n^3 - n$.

4° Quelles sont les valeurs de possibles de $5n^3 - n \wedge n + 2$?
En déduire l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles que

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = 19.$$

✫Problème 94 *12 points* *./1977/aixmarseilleC/pb/texte*

1. Soit la fonction Q_{n-2} de la variable réelle t, dépendant de n, entier naturel supérieur à 2, donnée par

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2}.$$

Montrer que, quel que soit $t \neq -1$,

$$Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}.$$

en intégrant les deux membres de cette dernière relation sur le segment $[0\,;x]$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, établir la relation

$$\ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} + \int_0^x \frac{t^{-n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \tag{I}$$

en posant : $P_{n-1}(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}$.

2. a) Soit la fonction numérique φ définie sur $]0\,;1]$ par

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x}{x}.$$

Montrer que l'on peut prolonger cette fonction φ par continuité pour $x = 0$.
Soit f le prolongement ainsi obtenu sur $[0\,;1]$, donné par :

$$f \quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \in]0\,;1] \\ \text{et} \qquad f(0) = 1. \end{cases}$$

b) De l'étude des variations de la fonction θ, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\theta(x) = x - \ln(1+x),$$

déduire que :

$$\text{quelque soit } x \in]0\,;+\infty[, \quad x - \ln(1+x) > 0.$$

En utilisant cette dernière relation, montrer que :

$$\text{quelque soit } x \in [0\,;1], \quad f(x) \leqslant 1.$$

c) Cette fonction f étant continue sur $[0\,;1]$, on rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Soit L sa valeur.

n étant un entier naturel non nul, montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{L}$.

3. a) Montrer que,

quelque soit $x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que, quel que soit $x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant \frac{1}{n}$.

En utilisant la relation I de la première question montrer que :

quelque soit $x \in]0\,;1]$, $\displaystyle -\frac{1}{nx} \leqslant f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$.

Par intégration sur le segment $\left[\dfrac{1}{n}\,;1\right]$, établir la relation :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(II)}$$

en posant

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}, \quad (n \geqslant 2).$$

b) Démontrer que, quels que soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0\,;1]$:

$$\frac{x^p}{p^2} \geqslant \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

En utilisant des égalités de la forme :

$$S_2(x) = x \quad ; \quad S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) \quad ; \quad S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) + \frac{x^3}{3^2} \quad ; \quad \ldots$$

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\,;1]$: $0 \leqslant S_n(x)$.
En utilisant des égalités de la forme :

$$x - S_3(x) = \frac{x^2}{2^2} \quad ; x - \quad S_4(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) \quad ; \quad x - S_5(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2} \quad ; \quad \ldots$$

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\,;1]$: $S_n(x) \leqslant x$; et en définitive que $0 \leqslant S_n(x) \leqslant x$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Déduire des résultats 3a) et 3b) précédents que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = \int_0^f (x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}.$$

4. En regroupant convenablement les termes de la somme :

$$S_n(1) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2},$$

et en raisonnant comme au 3b) montrer que,
quelque soit $n \geqslant 5$,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leqslant S_n(1) \leqslant 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.$$

On admettra alors le théorème suivant :

Théorème :
Soit une suite convergente (u_n). S'il existe deux réels a et b ($a \leqslant b$) et un entier naturel n_0 tel que,
quelque soit $n > n_0$, $a \leqslant u_n \leqslant b$, alors $a \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant b$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

II. Amiens, série C

Ex. 325. ——— *3 points.* *./1977/amiensC/exo-1/texte.tex*

1° Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.
2° Déterminer les entiers naturels tels que $n^2 - n$ soit divisible par 6.
3° Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $3x + y - 1$ et $x - y - 3$ soient tous les deux divisibles par 6.

III. Besançon, série C

✻ Ex. 326. ——— *3 points.* *./1977/besanconC/exo-1/texte.tex*

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$P(z) = z^3 + 2(3-2\mathrm{i})z^2 + (8-15\mathrm{i})z + 3 - 11\mathrm{i}.$$

1. z étant réel, calculer, en fonction de z, la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$.
   En déduire l'existence d'un réel unique z_0 tel que $P(z_0) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des racines (réelles ou complexes) de l'équation $P(z) = 0$.

✻ Ex. 327. ——— *5 Points.* *./1977/besanconC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien E_3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le plan P d'équation : $2x + y - z + 3 = 0$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P.

1° M étant un point de E_3 de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, déterminer les coordonnées $(a'\,;\,b'\,;\,c')$ du point M' image par s du point M.

2° On considère la droite D passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Déterminer des équations paramétriques de la droite D' ensemble des images par s des points de D.

IV. Bordeaux, série C

✻ Ex. 328. ——— *4 points.* *./1977/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

n étant un entier relatif quelconque, on pose :

$$A = n - 1 \qquad \text{et} \qquad B = n^2 - 3n + 6.$$

1. a) Montrer que le p.g.c.d de A et B est égal au p.g.c.d de A et de 4.
   b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le p.g.c.d de A et B.
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

V. Caen, série C

✻ Ex. 329. ——— *4 points.* *./1977/caenC/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210.
2. Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, Δ leur plus grand diviseur commun, μ leur plus petit multiple commun, déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que :

$$\begin{cases} \mu = 210.\Delta \\ y - x = \Delta. \end{cases}$$

Retour page 1

VI. Groupe 1, série C remplacement

✱ Ex. 330. ./1977/groupe1Crem/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1° Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Calculer $f'(x)$. Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Dresser le tableau de variation de f.

2° Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^\star$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{e}^{-x^4}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Existe-t-il $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

VII. Limoges, série C

☆**Problème 95** *12 points.* ./1977/limogesC/pb/texte

On considère la fonction réelle à variable réelle f définie par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}.$$

A- 1. Montrer que f est trois fois dérivable et calculer les dérivées successives f', f', f'''.

2. Étudier les fonctions f', f', f''' et construire les courbes représentatives.

B- Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par P_0, P_1, P_2, P_3 les fonctions telles que

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = -2x \quad ; \quad P_2(x) = 4x^2 - 2 \quad ; \quad P_3(x) = -8x^3 + 12x.$$

a) Montrer que $(P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ est une base de E.

b) Soit Q la fonction polynôme de E définie par $Q(x) = 3 - 10x + 4x^3$.
Quelles sont les coordonnées de Q dans la base précédente ?

c) Calculer les trois nombres

$$A_i = \int_{-1}^{+1} P_i(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec } i \in \{1,\ 2,\ 3\}.$$

d) Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall T \in \mathrm{E}, \qquad \phi(T) = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.

On pose $A = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer A.

Calculer en fonction de A le nombre

$$B = \int_{-1}^{+1} Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Retour page 1

Si T est un élément de E, calculer en fonction de A :

$$C = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer la nombre de ϕ en fonction de A.

C- Soit P un plan affine rapporté à un repère orthonormé.

Soit M un point de P de coordonnées $(x\,;\,y)$ animé d'un mouvement défini par :

$$x(t) = f(t) \qquad ; \qquad y(t) = f'(t) \qquad \text{avec } t \geqslant 0.$$

a) Déterminer l'équation de la trajectoire et la construire en précisant le sens de parcours.

b) Quels sont les vecteurs vitesse t accélération à l'instant t ? Pour $t_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, construire le représentant de ces vecteurs d'origine M_0.

c) Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire, le mouvement est accéléré ou retardé.

On donne $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6065$ et $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}2231$.

VIII. Lyon, série C

✻ Ex. 331. ———— *3 points.* *./1977/lyonC/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5\,440 \\ \mathrm{pgcd}(x,\ y) = 8 \end{cases}$$

IX. Lyon, série C remplacement

☆Problème 96 *./1977/lyonCrem/pb-1/texte*

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.

I- Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de sa structure d'anneau unitaire.

1. On considère la matrice J=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer son carré.

2. On désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble F des matrices de la forme $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ où α et β sont des nombres réels.

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$ et que (I, J) est une base de F.

   b) Montrer que F est stable pour le multiplication dans $\mathscr{M}$ et en déduire que F est un anneau commutatif et unitaire. Cet anneau est-il un corps ?

II- On appelle ψ l'application de F dans $\mathbb{C}$ qui, à toute matrice $A = \alpha\mathrm{I}+\beta\mathrm{J}$ de F, associe le nombre complexe $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

1. a) Montrer que ψ est un isomorphisme de (F, +) sur ($\mathbb{C}$, +).

   b) L'application ψ est-elle un isomorphisme de (F, $\times$) sur ($\mathbb{C}$, $\times$) ?

2. Aux deux nombres complexes $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z' = \alpha' + \mathrm{i}\beta'$, l'application ψ^{-1} fait correspondre les deux matrices $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ et $A' = \alpha'\mathrm{I} + \beta'\mathrm{J}$. On considère la loi de composition interne dans $\mathbb{C}$, notée $\star$, et définie par :

$$z \star z' = \psi(A \times A').$$

   a) Exprimer $(\alpha + \mathrm{i}\beta) \star (\alpha' + \mathrm{i}\beta')$.

   b) Quelle est la restriction de la loi $\star$ à $\mathbb{R}$?

   Quelle est la restriction de la loi $\star$ à l'ensemble des imaginaires purs ?

3. Étant donné un nombre complexe z, on note $z^{(0)} = 1$, $z^{(1)} = z$ et $z^{(n)} = z^{(n-1)} \star z$ pour tout entier naturel non nul n.

 a) Calculer $i^{(2)}$ puis $i^{(n)}$ pour $n > 2$. En posant $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, démontrer que $z^{(n)} = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta\mathrm{i}$ pour $n \geqslant 1$.

 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^{(2)} = 1 \quad z^{(3)} = 1$; $\quad z^{(n)} = 1 \quad z^{(2)} - z - \mathrm{i} = 0$.

4. Dans le plan complexe on considère le point M_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ et les points $M_2, M_3, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_2 = z_1^{(2)}$, $z_3 = z_1^{(3)}$, $\dots, z_n = z_1^{(n)}$.
 Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n.
 Trouver les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III- Soit P le plan vectoriel euclidien orienté de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit f l'endomorphisme de P de matrice $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ et soit φ l'endomorphisme de matrice J.

1. a) Á quelle condition f est-il un automorphisme de P ?

 b) Quel est le noyau de φ ? Quelle est l'image de φ ?

2. a) Soit ρ la rotation vectorielle de P dont la mesure (élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) admet pour représentant $\dfrac{\pi}{4}$.
 On considère les vecteurs $\vec{i_1} = \rho(\vec{i})$ et $\vec{j_1} = \rho(\vec{j})$ qui forment donc une base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ orthonormée directe. Exprimer $\vec{i_1}$ et $\vec{j_1}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

 b) Démontrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}$.
 En déduire la matrice de φ dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$. Soit $\vec{V} = x\vec{i_1} + y\vec{j_1}$. Quelles sont les composantes du vecteur $\varphi(\vec{V})$ dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$?

 c) Démontrer qu'il existe une homothétie vectorielle h, une rotation r et un projecteur p tels que $\varphi = h \circ r \circ p$.

X. Nancy, série C

✻ Ex. 332. ——— *3 points.* *./1977/nancyC/exo-1/texte.tex*

Soit n un entier strictement supérieur à 2. Si p est un entier relatif ($p \in \mathbb{Z}$) nous noterons par $\overline{p}$ la classe de p modulo n ($\overline{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). On note par S_n l'ensemble des x de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui vérifient $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

1. a) Démontrer que pour chaque n ($n > 2$) $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{-1}$ ne sont pas dans S_n.

 b) Démontrer que si $x \in \S_n$ et si $y \in \S_n$ on a alors

$$(x - y)(x + y) = \overline{0}.$$

 c) Démontrer que si $x \in S_n$, alors $-x \in \S_n$; montrer que si n est premier, S_n est vide ou a exactement deux éléments.

2. Résoudre l'équation $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$ dans chacun des cas suivants :

$$n = 5, \qquad n = 7, \qquad n = 6, \qquad n = 10.$$

✻ Ex. 333. ——— *4 Points.* *./1977/nancyC/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls ; soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f(0) = 0, \qquad \text{et } si x > 0,\ f(x) = x^2 \ln(x).$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé ; on donne $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0{,}61$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$. (On étudiera la dérivabilité de f en 0).

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \geqslant 0.$$

Retour page 1

a) Justifier l'existence de g

b) Calculer explicitement $g(x)$ pour $x > 0$.

c) Calculer $g(0)$; en déduire l'aire de la partie du plan définie par :

$$\{0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

☆**Problème 97** *13 Points.* *./1977/nancyC/pb/texte*

Soit E un espace affine de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

I- On appelle A, B, C, D les points de E définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants : $(1, -1, 0)$; $(2, 0, 1)$; $(-1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$.
Soit λ et μ des nombres réels ; on désigne par P le barycentre des points pondérés $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ) et par Q le barycentre des points pondérés $(C, 1+\lambda)$ et $(D, -\lambda)$.
Enfin on appelle G le barycentre des points pondérés $\left(P, \dfrac{1+\mu}{2}\right)$ et $\left(Q, \dfrac{1-\mu}{2}\right)$.

1. a) calculer, en fonction de λ, les coordonnées des points P et Q.
   b) Démontrer que les coordonnées de G sont :
   $$(\lambda+\mu,\ \lambda-\mu,\ \lambda \times \mu).$$
2. a) Le réel λ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand μ varie est une droite D_μ.
   b) Représenter D_λ par un système d'équations cartésiennes.
3. a) Le réel μ étant fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand λ varie est une droite D'_μ.
   b) Représenter D'_μ par un système d'équations cartésiennes.
4. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des points G obtenus quand λ et μ décrivent $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient $x^2 - y^2 = 4z$.
5. Reconnaître $\mathscr{S}$.

II- 1. Déterminer l'intersection de l'ensemble $\mathscr{S}$ défini au I4 avec chacun des trois plans d'équation $x = 0$, $z = 0$ et $z = 1$. Représenter les trois ensembles obtenus sur des figures séparées en rapportant chacun des plans considérés à un repère orthonormé simple.
2. Soit K et K' les points de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ -1)$ respectivement. On désigne par L la droite passant par K et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$, et par L' la droite passant par K' et de vecteur directeur $\vec{\imath}$.
   Soit M le point de E de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$; montrer que la projection orthogonale H de M sur L a pour coordonnées $(0\ ;\ y\ ;\ 1)$, et que la projection orthogonale H' de M sur L' a pour coordonnées $(x\ ;\ 0\ ;\ -1)$.
   Montrer que $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points M de E situés à égale distance de L et de L'.

III- On désigne par V l'espace vectoriel associé à E. Si φ est un réel vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, on désigne par F_φ l'endomorphisme de V défini par :

$$\begin{aligned} F_\varphi(\vec{\imath}) &= (-\cos 2\varphi)\vec{\jmath} + (\sin 2\varphi)\vec{k} \\ F_\varphi(\vec{\jmath}) &= -\vec{\imath} \\ \text{et } F_\varphi(\vec{k}) &= (-\sin 2\varphi)\vec{\jmath} + (-\cos 2\varphi)\vec{k} \end{aligned}$$

1. Montrer que F_φ est un endomorphisme orthogonal de V, et montrer que l'ensemble des vecteurs de V invariants par F_φ est le droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + (\tan)\varphi\vec{k}$.
2. Soit f_φ l'application affine de E dans E dont l'endomorphisme associé est F_φ et telle que $f_\varphi(K)$ soit le point K_1 de coordonnées $(2\tan\varphi\ ;\ 0\ ;\ 1)$, où K est le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
   a) Définir analytiquement f_φ.
   b) Montrer qu'il existe des points de E invariants par f_φ (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que f_φ est une rotation dont on déterminera l'axe δ_φ.

c) Montrer que δ_φ est inclus dans $\mathscr{S}$ et que $f_\varphi(L) = L'$ où L et L' sont les droites qu'l'on a définies au II2.

IV- Soi r une rotation (affine) telle $r(L) = L'$. On désigne par δ l'axe de r, et par R la rotation vectorielle associée à r.
Montrer que l'on a $R(\vec{j}) = \vec{i}$ ou $R(\vec{j}) = -\vec{i}$.
Montrer que la droite δ est contenue dans $\mathscr{S}$.

XI. Nice, série C

Ex. 334. *4 points.* *./1977/niceC/exo-1/texte.tex*

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls, avec $a \leqslant b$ qui vérifient

$$m + 10d = 142,$$

où m et d désignent respectivement le plus petit commun multiple (ppcm) et le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b.

XII. Orléans Tours, série C

Ex. 335. *4 points.* *./1977/orleansC/exo-1/texte.tex*

1° Déterminer l'ensemble E_1 des entiers relatifs x tels que le nombre

$$n = x^2 + x - 2$$

soit divisible par 7.

2° Déterminer l'ensemble E_3 des entiers relatifs x tels que le nombre n soit divisible par 3.

3° Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs x tels que le nombre n soit divisible par 42.
Quel est alors le plus petit entier n strictement positif divisible par 42 ?
On pourra utiliser la courbe représentative de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

Ex. 336. *3 Points.* *./1977/orleansC/exo-2/texte.tex*

Le plan affine euclidien étant rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, soit M un point mobile de ce plan dont la position est définie en fonction du temps t ($t \in]0\,;+\infty[$ par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = (\log t)\vec{i} + (1 - t + \log t)\vec{j}).$$

1° Déterminer et tracer, dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la trajectoire du point M quand t décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Justifier.

2° Montrer que le vecteur accélération a une direction indépendante de t.

3° Préciser les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire sur lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.
Soit A la position du point M à l'instant $t = 2$, construire les représentants d'origine A des vecteurs vitesse et accélération à cet instant.

☆Problème 98 *13 points.* *./1977/orleansC/pb/texte*

Partie A.
Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à un base orthonormée $(\vec{u},\ \vec{v})$.
tout vecteur $\vec{V}(x\ ;\ y))$ de $\vec{P}$ est déterminé par son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Aux deux nombres complexes a, b, fixés, est associée l'application φ de $\vec{P}$ dans lui-même,
telle que $\vec{V}(z) \longmapsto \vec{V}'(z')$ avec $z' = az + b\overline{z}$.

1° a) Démontrer que φ est une application linéaire de $\vec{P}$.

Retour page 1

b) Soit α, β, γ et δ réels tels que :

$$a = \alpha + \mathrm{i}\beta, \qquad b = \gamma + \mathrm{i}\delta.$$

Démontrer que la matrice de φ relative à la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ est : $\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \delta-\beta \\ \beta+\delta & \alpha-\gamma \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que φ est bijective, si et seulement si : $|a| \neq |b|$.

2° a) Démontrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$az + b\overline{z} = 0 \Longleftrightarrow (a,\ b) = (0,\ 0).$$

b) Soit Id l'application identique de $\vec{P}$.
Démontrer que φ est involutive, distincte de Id et (-Id), si, et seulement si, a est imaginaire pur et $|b| = |a+1|$.
Préciser la nature de φ.

c) Préciser les éléments caractéristiques de φ lorsque $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = +2$.

Partie B.
Soit P un plan affine euclidien, associé à $\vec{P}$, rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1° Soit f l'application de P dans P telle que $M(z) \mapsto M'(z') : z' = \mathrm{i}\sqrt{3}z + 2\overline{z} - (1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

a) Démontrer que f est involutive. Déterminer f avec précision.

b) Démontrer que $\mathscr{C}$, courbe d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 - 2x = 0$, est globalement invariante par f : $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

2° Soit g l'application de P dans P telle que $M(z) \mapsto M''(z'') : z'' = \dfrac{3}{4}z + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\overline{z}$.

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par g est une droite, $\mathscr{D}$.
En donner une équation cartésienne.

b) Démontrer que la direction de la droite (MM') est fixe, orthogonale à celle de $\mathscr{D}$.

c) Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 2.
Déterminer une équation cartésienne de Γ', image de Γ par g, relative au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, puis au repère $\left(O,\ \dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{2},\ \dfrac{-\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de Γ'.

D'après Bac. C Orléans-Tours.

XIII. Paris, série C

Ex. 337. ——— *3 points.* *./1977/parisC/exo-1/texte.tex*

1. Quel est le reste de la division par 8 du nombre 7^n, n désignant un entier naturel quelconque ?
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $7^n.n + 4n + 1$ soit divisible par 8 ?

Ex. 338. ——— *4 Points.* *./1977/parisC/exo-2/texte.tex*

1. Soit n un entier naturel. Une variable aléatoire X_n peut prendre les n valeurs

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \dots,\ \frac{k}{n},\ \dots,\ \frac{n}{n}$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Calculer l'espérance mathématique de X_n et trouver sa limite éventuelle quand $n \to +\infty$.

2. Soit f une fonction numérique, définie et continue sur le segment $[0\,;1]$.
Une variable aléatoire Y_n peut prendre des n valeurs

$$f\left(\frac{1}{n}\right),\ f\left(\frac{2}{n}\right),\ \dots,\ f\left(\frac{k}{n}\right),\ \dots,\ f\left(\frac{n}{n}\right)$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Écrire l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y_n)$ de Y_n. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{E}(Y_n)$ existe : l'exprimer sous forme d'une intégrale.

Retour page 1

3. p étant un entier au moins égal à 1, calculer la limite de

$$\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

XIV. Paris, série C remplacement

Ex. 339. ./1977/parisCrem/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° Étudier le sens de variation de F.

2° Étudier le signe de la fonction f définie par :

$$f(x) = F(x) - \ln x.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$.

3° Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\mathrm{e}^t > t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

Que peut-on en déduire sur la branche infinie de $\mathscr{C}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Tracer $\mathscr{C}$.

Retour page 1

Chapitre 18

1978.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 340. ./1978/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Un plan euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On appelle D (respectivement Δ) la droite passant par O dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{\imath}\cos\theta - \vec{\jmath}\sin\theta$) avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$.

1. Pour tout point M de $\mathscr{P}$, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint $(P,\ Q)$ dont M soit le milieu tel que $P \in$D et $Q \in \Delta$.
2. On appelle Q' (respectivement P') le projeté orthogonal de P (respectivement Q) sur Δ (resp. D) et M' le milieu du bipoint $(P',\ Q')$.
   On désigne par S l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $\mathrm{S}(M) = M'$.
   Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{OQ} = r'\vec{v}$.
   Calculer en fonction de $r,\ r',\ \theta$, les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M et $(x'\ ;\ y')$ de M'.
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

Ex. 341. ./1978/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit E l'ensemble des triplets $X = (p,\ q,\ r)\quad (p \in GZ,\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}^{\star})$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application f de E dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes telle que

$$X \in E \longmapsto f(X) = \frac{p + \mathrm{i}q}{r} = Z.$$

1° Calculer $|Z|$.
Montrer que, dans E, la loi notée $\star$, définie par

$$X_1 \star X_2 = (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_2 q_1 + p_1 q_2, r_1 r_2)$$

avec $X_1 = (p_1,\ q_1,\ r_1)$ et $X_2 = (p_2,\ q_2,\ r_2)$ est une loi de composition interne.
Calculer $f(X_1 \star X_2)$. Montrer que f est un homomorphisme de $(E,\ \star)$ dans $(\mathbb{C},\ .)$.

2° Vérifier que si $X_0 = (3,\ 4,\ 5)$, $X_0 \in E$.
Calculer $X_0 \star X_0$, $X_0 \star (X_0 \star X_0)$.
En déduire deux solutions, autres que X_0, en nombres entiers positifs de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

☆Problème 99

./1978/aixmarseilleC/pb/texte

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
$\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\mathscr{F}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I- 1. Soit u la fonction affine définie par :

$$x \in \mathbb{R} \to u(x) = ax + b \qquad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que u vérifie la relation

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad \left|u(x) - u(y)\right| \leqslant |a|.\left|x - y\right|.$$

2. Soit V la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \to V(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Montrer que V vérifie la relation

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad \left|V(x) - V(y)\right| \leqslant \left|x - y\right|.$$

3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$:

$$(\exists\ M,\ M \in \mathbb{R}^+),\ (\forall t \in \mathbb{R}), \quad |f(t)| \leqslant M.$$

a) Montrer qu'il existe une fonction F, continue sur $\mathbb{R}$, définie par

$$x \in \mathbb{R} \to F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad \left|F(x) - F(y)\right| \leqslant M\left|x - y\right|.$$

c) En déduire que les applications F_1 et F_2 définies par

$$F_1 : x \longrightarrow \sin x$$
$$F_2 : x \longrightarrow \log(\mathrm{e}^x + 1)$$

vérifient respectivement

$$(\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2),\ \left|F_1(x) - F_1(y)\right| \leqslant \left|x - y\right|,$$
$$\left|F_2(x) - F_2(y)\right| \leqslant \left|x - y\right|.$$

II- On se propose d'étudier l'ensemble (L) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la proposition :

$$\left\{(\forall f,\ f \in (\mathrm{L})\,), \quad (\exists \lambda_f,\ \lambda_f \in \mathbb{R}_+),\ (\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \lambda_f \left|x - y\right|\right\}.$$

1. Montrer que (L) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F},\ +,\ .)$.

Retour page 1

2. Établir que $(\forall f_1,\ f_1 \in (\mathrm{L})\ ),\quad (\forall f_2,\ f_2 \in (\mathrm{L})\ ),\quad f_2 \circ f_1 \in (\mathrm{L})$ où $\circ$ désigne la composition des applications.
3. Montrer que toute application de (L) est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

III- 1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \to \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin x.$$

Vérifier que

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2),\quad \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \leqslant \frac{1}{3}\left|x - y\right|,$$

et $\varphi(\pi) = \pi$.

2. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^{\star}),\quad u_n = \varphi(u_{n-1}).$$

Établir que $(\forall n \in \mathbb{N}),\quad |u_n - \pi| \leqslant \frac{1}{3^n}|u_0 - \pi|$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. Donner sa limite.

IV- On définit les deux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\theta : x \longrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$G : x \longrightarrow G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la fonction θ. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Démontrer que $(\forall t,\ t \in \mathbb{R}),\quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$.
   En déduire que G appartient à (L).
3. Démontrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
   Étudier le sens de variation de G.
4. Établir que $(\forall x,\ x \geqslant 1),\quad \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction G est bornée et admet une limite ℓ (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$.

II. Aix-Marseille remplacement, série C

✻ Ex. 342. ./1978/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

Un plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On appelle D (respectivement Δ) la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{i}\cos\theta - \vec{j}\sin\theta$) avec $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

1. Pour tout point M de $\mathscr{P}$, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint $(P,\ Q)$ dont M soit le milieu et tel que $P \in D,\ Q \in \Delta$.
2. On appelle Q' (respectivement P') le projeté orthogonal de P (respectivement Q) sur Δ (resp. D) et M' le milieu du bipoint $(P',\ Q')$. On désigne par S l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $S(M) = M'$.
   Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = r'\vec{v}$. Calculer en fonction de $r,\ r',\ \theta$ les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M et $(x'\ ;\ y')$ de M'.
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

III. Amiens, série C

✻ Ex. 343. ./1978/amiensC/exo-1/texte.tex

1° Soit U et V deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout entier naturel n associent respectivement U_n et V_n définis par :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})U_n + 3$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = U_n - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Calculer V_0. Déterminer une relation entre V_{n+1} et V_n, en déduire en fonction de n l'expression de V_n, puis celle de U_n, pour tout entier naturel n.

2° Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1, d'affixe z_1, tel que $z_1 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + 3$.
On pose $f^1 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Quelle est la nature géométrique de f, ainsi que celle de f^n ?
Soit $M_n = f^n(M)$, déterminer l'affixe z_n de M_n.

3° Soit A_0 le point de $\mathscr{P}$ d'affixe 1, déterminer l'affixe de A_n. Comparer le résultat obtenu à la valeur de U_n. Expliquer.

IV. Besançon, série C

✻ Ex. 344. ./1978/besanconC/exo-1/texte.tex

a et b étant deux entiers naturels vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x,\ y)$ éléments de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$x^2 - y^2 = a^2b^2.$$

Applications : Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ dans les deux cas suivants :

$$(a,\ b) = (7\ ;\ 2)$$

$$(a,\ b) = (11\ ;\ 5)$$

✻ Ex. 345. ./1978/besanconC/exo-2/texte.tex

Le plan vectoriel E est rapporté à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1° Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que la famille $(\vec{v}, f(\vec{v}))$ soit une famille liée et vérifier que c'est une droite vectorielle.

2° Soit $\vec{i'} = \vec{i} + \vec{j}$. Après avoir vérifier que $(\vec{i'}, \vec{j})$ est une base de E, donner la matrice de f dans la base $(\vec{i'}, \vec{j})$.

3° Montrer que f est la composée de deux symétries vectorielles f_1 et f_2 $(f = f_2 \circ f_1)$ telles que $f_1(\vec{i'}) = f_2(\vec{i'}) = \vec{i'}$ et $f_1(\vec{j}) = -\vec{j}$.

V. Bordeaux remplacement, série C

✻ Ex. 346. ./1978/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Un nombre naturel N dont le nombre des dizaines est noté D et dont le chiffre des unités est noté u, s'écrit :

$$N = 10D + u.$$

On considère le nombre $N' = D + 2u$.

1. Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés :

Retour page 1

(i) N est divisible par 19,

(ii) N' est divisible par 19.

En utilisant plusieurs fois de suite cette équivalence étudier si le nombre 29 431 est divisible par 19.

2. Dans cette question on ne considère que des naturels N *non divisibles* par 19.
Les nombres N et N' peuvent-ils être congrus, modulo 19 ?
On note r et r' les restes respectifs des divisions de N et N' par 19, déterminer une relation entre r et r'.

VI. Côte d'ivoire, série C

Ex. 347. *./1978/cotedivoireC/exo-1/texte.tex*

1° Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 + y^2 = 25$.

2° Soit (C) la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.
Trouver tous les points de (C) dont les coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et placer ces points dans un repère orthonormé.

Ex. 348. *./1978/cotedivoireC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que

$$z_1 = \mathrm{i}\overline{z} + a + \mathrm{i}b$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, a et b étant deux réels quelconques donnés.
On appelle A le point de coordonnées a et b.

1° Montrer que f est un antidéplacement de $\mathscr{P}$.

2° Comment faut-il choisir le point A pour que f soit une symétrie orthogonale ? Préciser quelle est cette symétrie.

3° On choisit le point A de telle sorte que f ne soit pas une symétrie orthogonale.

a) Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments qui définissent f.

b) On pose $f^1 = f$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.
Montrer que, pour tout entier naturel p non nul, f^{2p} est une translation dont on donnera le vecteur. Quelle est la nature de f^{2p+1} ?

Ex. 349. *./1978/cotedivoireC/exo-3/texte.tex*

NB : le problème se compose de quatre parties.
La solution de la partie III ne fait appel à aucun des résultats établis dans les parties I et II
La partie IV peut-être traitée en admettant les résultats de la partie III.
Dans tout le problème, on désignera par S l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

I- On définit sur S une loi Δ de la façon suivante :

$$\forall x \in S \qquad \forall y \in S \qquad x\Delta y = x + y + xy.$$

Démontrer que Δ est une loi de composition interne dans S et qu'elle confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

II- Soit h_1 l'application définie par

$$\forall x \in S \qquad h_1(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}} - 1.$$

1. a) Montrer que h_1 prend ses valeurs dans S.

b) Établir que

$$\forall x \in S \qquad \forall y \in S \qquad h_1(x\Delta y) = h_1(x)\Delta h_1(y).$$

2. a) Étudier les variations de h_1 et en déduire que h_1 est une bijection de S sur S.

Retour page 1

b) Calculer $h_1'(0)$.

c) Construire la courbe (Γ) représentative de h_1 dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

3. Soit t l'application de S sur $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :

$$\forall x \in S \qquad t(x) = x+1.$$

a) Montrer que t est un isomorphisme du groupe $(S,\ \Delta)$ sur le groupe $(\mathbb{R}_+^\star,\ \times)$.

b) Soit f_1 l'application définie par :

$$f_1 = t \circ h_1 \circ t.$$

Déduire de ce qui précède que f_1 est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^\star,\ \times)$ dans lui-même.

c) Calculer $f_1(x)$, puis $f_1'(1)$.

d) Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f_1 dans le même repère que précédemment et vérifier que $(\mathscr{C})$ se déduit de (Γ) par une translation que l'on précisera.

III- Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\boxed{P} \qquad f \text{ est dérivable au point } 1$$

$$\boxed{Q} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

1) Vérifier que l'application f_1 définie au II est un élément de $\mathscr{F}$.

2) Soit f un élément quelconque de $\mathscr{F}$.

a) Établir que $f(1) = 1$.

b) Soit x_0 un réel strictement positif et k un réel tel que $x_0 + k \in \mathbb{R}_+^\star$.

Montrer que $f(x_0+k) - f(x_0) = f(x_0)\left(f(1+\dfrac{k}{x_0}) - f(1)\right)$.

c) Déduire de ce qui précède que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^\star$ et que l'on a :

$$\boxed{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

d) Que se passe-t-il pour f si l'on choisit $f'(1)$ nul ?

Montrer que f est strictement monotone si l'on choisit $f'(1) \neq 0$.

e) En considérant une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{x}$$

montrer que, α désignant un réel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(x) = x^\alpha.$$

*

3) Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ du type $x \mapsto x^\alpha$ où α décrit $\mathbb{R}$.

IV- On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications h de S dans S vérifiant les deux conditions :

$$\boxed{P'} \qquad h \text{ est dérivable au point zéro}$$

$$\boxed{Q'} \qquad \forall x \in S \qquad \forall y \in S \qquad h(x\Delta y) = h(x)\Delta h(y)$$

1) Vérifier que l'application h_1 de la partie II est un élément de $\mathscr{H}$.

2) t étant l'application définie au II, montrer que si $h \in \mathscr{H}$, alors $t \circ h \circ t \in \mathscr{F}$.

3) Montrer que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des applications de S dans S du type $x \mapsto (1+x)^\alpha - 1$ où α décrit $\mathbb{R}$.

Retour page 1

4) Pour tout α réel et tout élément x de S, on note $a^{[\alpha]}$ l'élément $(a+1)^{\alpha}-1$ de S.
Établir que :

a) $\forall x \in S \quad \forall y \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta y^{[\alpha]} = (x\Delta y)^{[\alpha]}$.

b) $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta x^{[\beta]} = x^{[\alpha+\beta]}$.

c) $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \left(x^{[\alpha]}\right)^{[\beta]} = x^{[\alpha\beta]}$.

VII. Liban, série C

Ex. 350. ——— *4 points.* *./1978/libanC/exo-1/texte.tex*

Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal.
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué des entiers n qui possède les propriétés suivantes :

▷ 4 divise n

▷ n admet au moins dix diviseurs appartenant à $\mathbb{N}$ il existe un entier premier p tel que $n = 37p+1$.

1. Quel est le plus petit élément de E ?
2. Existe-t-il un élément n, de E, vérifiant $26\,800 < n < 27\,800$?

Ex. 351. ——— *4 points.* *./1978/libanC/exo-2/texte.tex*

Soit E un plan vectoriel euclidien rapporté à une base $(\vec{a},\ \vec{b})$. (Le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E est noté $\vec{x}.\vec{y}$).
Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans E, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \cos t\,\vec{a} + \sin t\,\vec{b}$$

et φ' sa dérivée.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ constituent une base de E.
2. Pour tout réel t, décomposer $\varphi(t)$ dans une telle base.
3. Étudier l'ensemble des réels u tels que $\varphi(u).\varphi'(u) = 0$.

Ex. 352. ——— *12 points.* *./1978/libanC/exo-3/texte.tex*

I- Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

II- 1. Montrer que, pour tout réel b strictement positif,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \left[x \leqslant b \Rightarrow \mathrm{e}^{x} - 1 - x \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{b}x^2\right]$$

$$\text{et} \qquad \left[x \geqslant -b \Rightarrow \mathrm{e}^{x} - 1 - x \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-b}x^2\right].$$

2. Montrer que, pour tout réel a, il existe une application φ_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \varphi_a(x)\right].$$

En déduire que f est différentiable.
Préciser la dérivée f' de f.

Retour page 1

III- Soit P une primitive (sur $\mathbb{R}$) de f de l'application $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$.
Á tout réel x, on associe l'application Q_x, de $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I ; expliciter sa dérivée.
Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

IV- Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x^2).$$

Soit g' sa dérivée.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Que peut-on dire da la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \ ?$$

Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$?

VIII. Limoges remplacement, série C

✻ Ex. 353. ./1978/limogesCrem/exo-1/texte.tex

1° Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Sachant que 2 et 3 sont premiers entre eux : Prouver que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z}\}$ est non vide.

2° Déterminer A.

3° Déterminer l'ensemble $B = \{x \in A / x^2 + f^2(x) \in 5\mathbb{Z}\}$.

✻ Ex. 354. ./1978/limogesCrem/exo-2/texte.tex

L'espace vectoriel E de dimension 3 est muni d'une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{j}) &= \vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{k}) &= \vec{i} - \vec{j} \end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau N de f et en donner une base.
   Déterminer l'image E' de f et démontrer que $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base de E'.
2. Soit g la restriction de f à l'image E'. Donner la matrice A de g sur la base ($vecteuri, \vec{j}$) ; montrer que g est bijective et déterminer l'application réciproque g^{-1}.
3. Déterminer l'unique endomorphisme h de E ayant les propriétés suivants : la restriction de h à E' est g^{-1} et le noyau de h est la noyau N de f.

Retour page 1

IX. Lyon, série C

✻ Ex. 355. ./1978/lyonC/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation

$$13x - 84y = 7.$$

2° Déterminer les solutions $(x,\ y)$ de cette équation telles que x et y soient premiers entre eux (on pourra montrer que si $(x,\ y)$ est une solution de cette équation, alors le PGCD de x et de y est 1 ou 7).

X. Montpellier Extrême Orient, série C

✻ Ex. 356. *5 points* ./1978/montpellierC/exo-1/texte.tex

P est un plan affine rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit a un nombre réel.
On considère l'application affine notée f_a définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathrm{P} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ M(x\ ;\ y) & \longmapsto & M'(x'\ ;\ y') \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} x' & = & ax + a - 1 \\ y' & = & (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{array}.$$

1° Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

2° Existe-t-il a tel que f_a soit involutive ? Montrer qu'alors f_a est une symétrie que l'on précisera.

3° Déterminer avec précision l'ensemble $f_a(\mathrm{P})$ suivant les valeurs de a.
On suppose $a = 0$. soit t la translation de vecteur $3\vec{\jmath}$. Montrer qu'il existe une projection p que l'on déterminera telle que :

$$f_0 = t \circ p = p \circ t.$$

✻ Ex. 357. *3 points.* ./1978/montpellierC/exo-2/texte.tex

Dans un jeu de hasard, un joueur a misé 1 F sur le numéro 5. Le jeu consiste à jeter deux dés parfaits.
Si le numéro 5 est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4 F. S'il est obtenu sur un seul dé, le joueur reçoit 3 F. S'il n'est obtenu sur aucun dé, le joueur perd sa mise.

1° Quelles sont les probabilités respectives de ces événements ?

2° Le gain du joueur (somme reçue diminuée de la mise) est une variable aléatoire. Quelle est son espérance mathématique ?

✰**Problème 100** *12 points.* ./1978/montpellierC/pb/texte

A - Soit la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array}.$$

1. Démontrer que φ est impaire. Étudier les variations de la fonction φ et tracer as courbe représentative.
2. On désigne par I l'intervalle $]-1\,;1[$. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur I. Déterminer l'application réciproque φ^{-1}.
3. Démontrer que si a et b sont deux nombres réels, alors :

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1+\varphi(a)\varphi(b)}.$$

4. En déduire que si α et β appartiennent à l'intervalle I, alors :

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \quad \text{appartient à } I.$$

Retour page 1

B - Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère le sous-ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \quad |z| < 1\}.$$

Soit α un réel appartenant à I.

1. En supposant $z \in D$, comparer $|z - \alpha|$ et $|1 - \alpha z|$.
   En déduire que si z appartient à D, alors $\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ est défini et appartient à D.
2. Pour tout α de I, on a ainsi défini une application f_α :

$$\begin{aligned} f_\alpha : D &\longrightarrow D \\ z &\longmapsto \frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \end{aligned}.$$

   Montrer que f_α est une bijection de déterminer la bijection réciproque.
3. On pose : $\mathscr{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$.
   Montrer que la composition des applications (notée $\circ$) est une loi de composition interne dans $\mathscr{F}$.
   Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{F} \\ a &\longmapsto f_{\varphi(a)} \end{aligned}$$

   (φ désignant l'application définie au A) est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathscr{F}, \circ)$.
   Montrer que cet isomorphisme permet de retrouver les propriétés de f_α.

XI. Nancy Metz, série C

✻ Ex. 358. ——— *4 points.* *./1978/nancyC/exo-1/texte.tex*

1° Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 11.

2° En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer suivant les valeurs des entiers naturels k et m, les restes de la division par 11 des deux nombres

$$A = 1978^k$$

$$B = 421^{5m} + 421^{4m} + 421^{3m} + 421^{2m} + 421^m.$$

XII. Nantes, série C

✻ Ex. 359. ——— *3 points.* *./1978/nantesC/exo-1/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue x :

$$3x^2 + 4x \equiv 0 \, [\quad \text{modulo } 21].$$

XIII. Nice, série C

✻ Ex. 360. ——— *4 points.* *./1978/niceC/exo-1/texte.tex*

1° Trouver toutes les paires d'entiers naturels a et b tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{pgcd}\,(a, b) = 42 \\ \text{et} \\ \text{ppcm}\,(a, b) = 1680. \end{cases}$$

Retour page 1

2° Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que

$$8x = 7 \qquad (\text{modulo } 5).$$

3° Résoudre l'équation :

$$(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad 336x + 210y = 294.$$

La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée.

XIV. Paris, série C

Ex. 361. ./1978/parisC/exo-1/texte.tex

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont notés $\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dots,\ \dot{90}$),

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, l'équation

$$ax = \dot{0}.$$

2. résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}.$$

Ex. 362. ./1978/parisC/exo-2/texte.tex

Soit un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ d'axes Ox, Oy.

1. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel λ, la nature de la courbe C_λ dont l'équation dans le repère $\mathscr{R}$ est

$$\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + \lambda^2 - \lambda = 0.$$

2. Soit M_0 un point quelconque du plan. Discuter, suivant la position de M_0, le nombre et la nature des courbes C_λ passant par ce point ; dessiner les régions trouvées.

XV. Paris remplacement, série C

Ex. 363. ./1978/parisCrem/exo-2/texte.tex

1. Soit E l'ensemble des points du plan affine dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $y \geqslant x^2$. A_1 de coordonnées $(a_1\ ;\ b_1)$ et A_2 de coordonnées $(a_2\ ;\ b_2)$ étant deux points de E, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ et$1-\lambda$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Calculer les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de G et montrer que $G \in$E.
2. a) Établir par récurrence sans nouveau calcul que, si n points $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ appartiennent à E, la barycentre de ces points affectés de coefficients égaux, appartient à E.

   b) On considère la cas où les points $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ d'abscisses $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ sont sur la courbe d'équation $y = x^2$. Déduire de 2a l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

XVI. Poitiers, série C

Ex. 364. ./1978/poitiersC/exo-1/texte.tex

Étant donné deux entiers naturels non nuls a et b, on désigne respectivement par d et m le PGCD et Le PPCM de a et b.

Déterminer l'ensemble S des paires $\{a,\ b\}$ telles que

$$d + m = 126 \qquad \text{et} \qquad 5 < d < 10.$$

Retour page 1

✻ Ex. 365. ./1978/poitiersC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = xe^{1-x^2} \quad \text{si} \quad x \leqslant 1$$
$$\text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx \quad \text{si} \quad x > 1 \quad \text{où } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

1° Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable au point 1.

2° Étudier alors les variations de f et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

3° On désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x,\ y)$ sont telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$.

✩Problème 101

./1978/poitiersC/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$ et $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.

I - Vérifier que le sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{P}$ d'équation $4x^2 + 9x^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ est une ellipse dont on précisera le centre ω, les foyers, les directrices et l'excentricité. Représenter $\mathscr{E}$.

II - Soit g l'application affine admettant ω comme point invariant et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice par rapport à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

vérifier que g est bijective. Calculer les coordonnées de $g(M)$ en fonction des coordonnées (x ; y) de M. Montrer que $g(\mathscr{E})$, l'image de $\mathscr{E}$ par g, est le cercle C ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse $\mathscr{E}$.

III - K étant un sous-ensemble de $\mathscr{P}$, on dit qu'une bijection affine de $\mathscr{P}$ laisse K invariant si et seulement si $f(K) = K$.

Montrer que l'ensemble F des bijections affines f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ laissant K invariant, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

IV - 1. On appelle G le groupe des applications affines de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent $\mathscr{E}$ invariant. Donner des exemples d'éléments de G.

2. On appelle G_1 le groupe des applications affines de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent C invariant.

a) Montrer que f_1 appartient à G_1 si et seulement si

$$g^{-1} \circ f_1 \circ g \quad \text{appartient à G.}$$

b) Soit h l'application de G_1 dans G définie par :

$$h(f_1) = g^{-1} \circ f_1 \circ g.$$

Montrer que h est un isomorphisme de G_1 sur G.

V - Soit f_1 une bijection affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laisse C invariant.

1. On pose $\omega_1 = f_1(\omega)$. Un diamètre de C passant par ω_1 coupe C en A_1 et B_1.
Soient $A = f_1^{-1}(A_1)$ et $B = f_1^{-1}(B_1)$. En utilisant les propriétés des bijections affines, montrer que $\omega_1 = \omega$.

2. Soit φ_1 l'endomorphisme associé à f_1. Montrer que, pour tout vecteur $\vec{V}$ de $\mathscr{V}$, le point M tel que $\overrightarrow{\omega M} = \dfrac{3\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ appartient au cercle C, et en déduire que $\left\|\varphi_1(\vec{V})\right\| = \left\|\vec{V}\right\|$.

3. En déduire que les éléments de G_1 sont des isométries affines que l'on déterminera.

VI - 1. Déduire des questions précédentes que les bijections affines f appartenant à G laissent ω invariant.

2. Donner la forme générale des matrices par rapport à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$ des endomorphismes qui leur sont associés.

3. Quelles sont les isométries affines de G ?