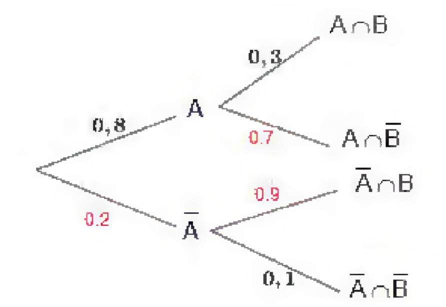
Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session de contrôle 2017 Section : *Mathématiques*

Exercice 1

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :



1) a) 0.7

2) b) 0.18=0.2x0.9

3) c) $\dfrac{p(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.8\text{x}0.3}{0.8\text{x}0.3+0.2\text{x}0.9} = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$.

Exercice 2

Le triangle AIC est rectangle en I et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ car $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, puisque $I \in [CB]$.

De plus $[IE]$ est une médiane dans ce triangle donc $IE = AE$ donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

$AB=\sqrt{2}\ AI$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ par la suite $S(I) = B$.

- $S_\Delta(E) = I$ alors $f(E) = S \text{ o } S_\Delta(E) = S\ (I) = B$.

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte S_Δ de rapport 1 et comme $A \in \Delta$ alors $f(A) = S \text{ o } S_\Delta(A) = A$ (f(A) = A) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}\times 1 = \sqrt{2}$.

c) f o f est une homothétie de centre A et de rapport : $\sqrt{2}^2 = 2$.

* $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ donc f o f (E)=C.

* f o f (E)=C d'où f (f(E)) = C or f(E) = B alors f(B) =C.

d) * (BJ) $\perp$ (AE) et f(B)=C donc :

f (BJ) est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite f(AE) = (AB). D'où f(BJ) = (CK).

* $J \in (BJ)\cap(AC)$ donc $f(J) \in f(BJ)\cap f(AC) = (CK)\cap(AB) = \{K\}$. Ainsi $f(J) = K$. (f(AC)=f(AE)).

3) a) On a $g(C) = A$ et $g(K) = I$. On note $B' = g(B)$.

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et <u>direct</u> donc son image IB'A par g est un triangle rectangle en I, isocèle et <u>indirect</u>. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect. D'où B= B' et par la suite B est le centre de g.

b) g(B) = B et g(K)= I et A appartient à la droite (BK) donc D =g(A) est un point de la droite (BI).

c) g(C)=A , g(B)=B et g(A)=D ; g est une similitude indirecte d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite $[AT)$.

4) a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

- $\varphi(A) = gof(A) = g(A) = D$ et $\varphi(B) = gof(B) = g(C) = A$.

b) $\varphi(A) = D$ et $\varphi(B) = A$. Soit θ une mesure de l'angle de φ.

$$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi].$$

5) • $\varphi(E) = gof(E) = g(B) = B$, $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = D$. Donc $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$.

•$\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ est la complosée de 3 similitudes directes de même centre Ω et de même angle $\frac{7\pi}{6}$ donc c'est une similitude directe de centre Ω et d'angle $3x\frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

• $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ et $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = F$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{DF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(EJ) \perp (DF)$.

c) • $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$ et $\varphi(J) = g \circ f(J) = g(K) = I$ d'où $F = \varphi \circ \varphi(I)$

• $\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I) = F \\ \varphi \circ \varphi(E) = A \\ \varphi \circ \varphi(B) = D \end{cases}$ et comme IB = IE alors FD = FA.

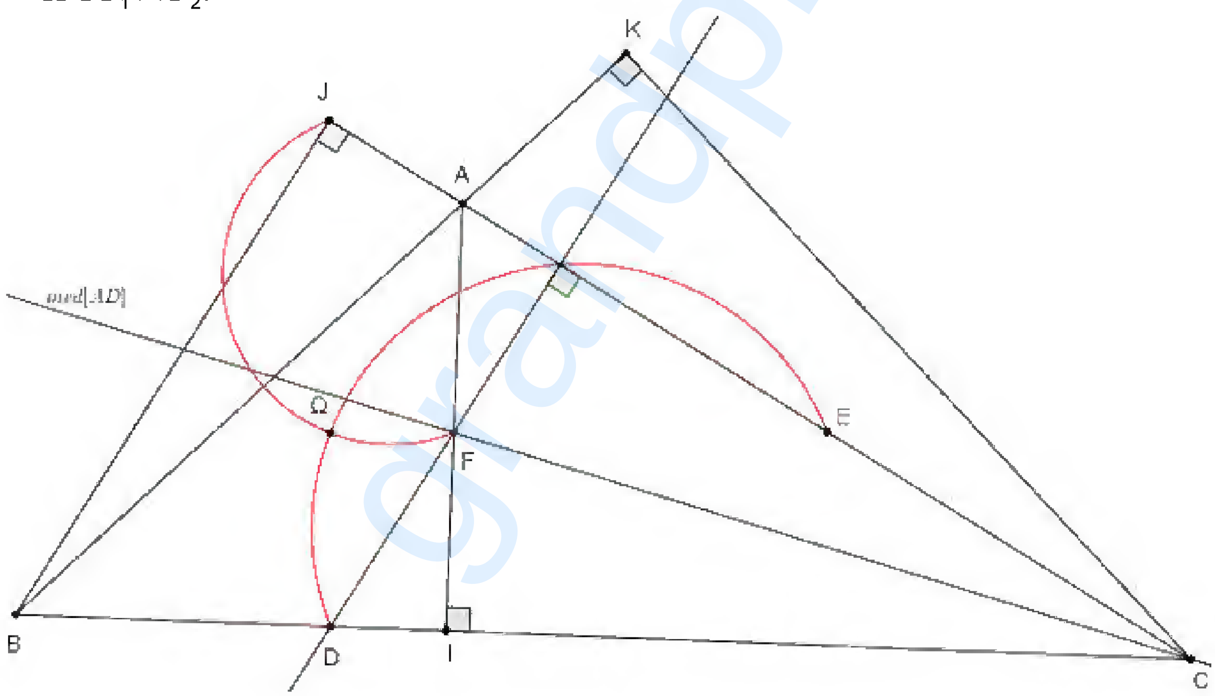
d) •Pour la construction du point D :

On utilise le fait que $FD = FA$ c'est à dire $F \in med[AD]$ et que $(FD) \perp (JE)$.

• $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_1 de diamètre $[ED]$. Voir figure

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JF]$. Voir figure

• $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) $z_1+z_2=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\notin\mathbb{R}$ donc z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

2) a) $z_C=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_1z_2=(2z_C)^2-4=4(z_C^2-1)$. Car $z_2+z_1=2z_C$ et $z_1z_2=1$.

c) $\left(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{CI}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{CJ}\right)\equiv\arg\left(\frac{1-z_C}{z_2-z_1}\right)+\arg\left(\frac{-1-z_C}{z_2-z_1}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{1-z_C}{z_2-z_1}\cdot\frac{-1-z_C}{z_2-z_1}\right)[2\pi]$

$$\equiv\arg\left(\frac{z^2{}_C-1}{(z_2-z_1)^2}\right)[2\pi]\equiv\arg\left(\frac{1}{4}\right)[2\pi]\equiv0[2\pi]$$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].

La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

b) • $(M\in(C))\ \Leftrightarrow\ KM=KI\ \Leftrightarrow\ |z-iy|=|1-iy|\Leftrightarrow\left(|z-iy|^2=|1-iy|^2\right).$

$\Leftrightarrow\ (z-iy)(\overline{z}+iy)=(1-iy)(1+iy)$

$\Leftrightarrow\ z\overline{z}+iy(z-\overline{z})+y^2=1+y^2$

$\Leftrightarrow\ z\overline{z}+iy(z-\overline{z})=1.$

c) $A\in(C)\ \Leftrightarrow\ z_1\overline{z_1}+iy(z_1-\overline{z_1})=1\Leftrightarrow\ \frac{1}{z_2}\frac{1}{\overline{z_2}}+iy\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{\overline{z_2}}\right)=1$

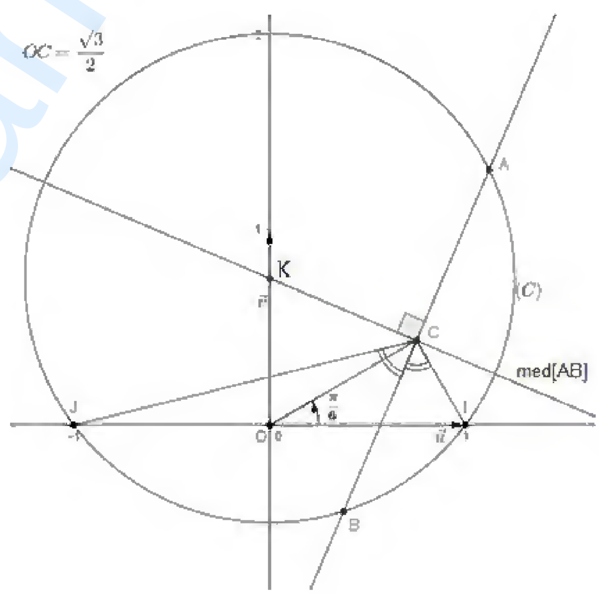
$\Leftrightarrow\ \frac{1}{z_2.\overline{z_2}}\left(1+iy\left(\overline{z_2}-z_2\right)\right)=1\Leftrightarrow\ z_2\overline{z_2}+iy\left(z_2-\overline{z_2}\right)=1\Leftrightarrow\ B\in(C).$

4) a) $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, Voir figure.

b) La droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ($OA>OB$ car $|z_1|>1$.)



Exercice 4

A) 1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à (C_f)

b) • $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(x+1)}{x}$. (pour x > 0, $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1)$)

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$,

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} . \dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

La courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{i})$.

2) a) Pour tout $x > 0$,

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) = 2\ln x - \ln(x+1)$.

D'où $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Tableau de variation

x	0 ∞	+
f'(x)	||	+
f	|| $-\infty$ ↗	$+\infty$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)$.

De la continuité de f sur $]0,+\infty[$ et des égalités $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ on déduit que $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

3) a) On trouve $x' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = x''$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in (C_f) \cap (0,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = x+1. \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

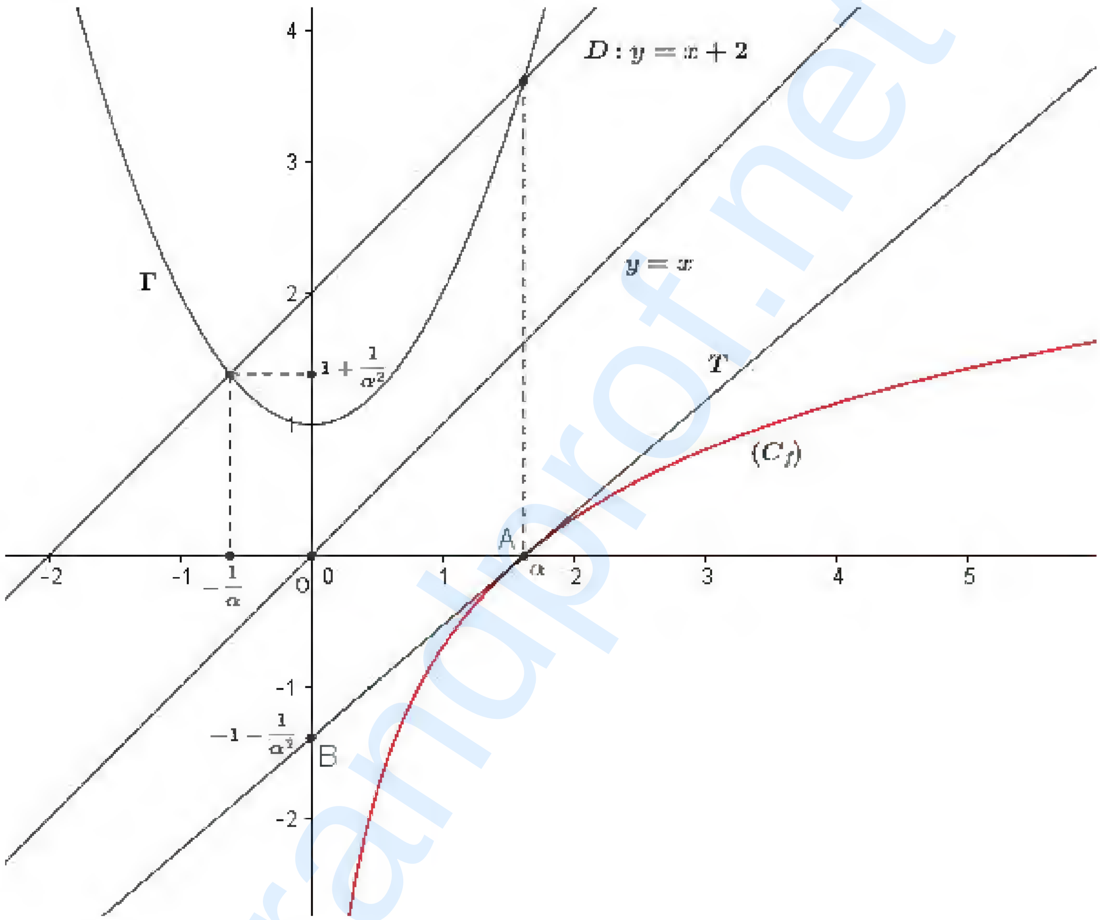
d) $T : y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

$f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)=\dfrac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$ puisque $\alpha^2=\alpha+1$, d'où $f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

Par la suite $T :\ y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) $B\left(0\,,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(0-\alpha)=-1-\dfrac{1}{\alpha^2}$ alors $B\in(T)$.

4) a) et b)



B) 1) a) Soit $x\geq 1$ et $t\in[1,x]$,

$*$ $1 \leq t \leq x$ et $n\geq 1$ alors $1 \leq t^n \leq x^n$ or f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

donc $f(1) \leq f\left(t^n\right) \leq f(x^n)$ d'où $\displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right)dt \leq \int_1^x f(t^n)\,dt \leq \int_1^x f(x^n)\,dt$.

Donc pour tout $x\geq 1$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f\left(x^n\right)(x-1)$.

b) $G_n(x)=\int_1^x f(t^n)\,dt$. On intègre par parties:

Posons $\begin{vmatrix} u(t) = f(t^n) \\ v'(t)=1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u'(t) = n\,t^{n-1}\dfrac{t^n+2}{t^n\left(t^n+1\right)} = \dfrac{n}{t}\dfrac{t^n+2}{\left(t^n+1\right)} \\ v(t) = t \end{vmatrix}$

Donc $G_n(x)=\left[t f\left(t^n\right)\right]_1^x - n\int_1^x \dfrac{t^n+2}{t^n+1}dt = x f\left(x^n\right)-f(1)-n\int_1^x\left(1+\dfrac{1}{t^n+1}\right)dt$

$= x f\left(x^n\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-n(x-1)-\int_1^x \dfrac{n}{t^n+1}dt.$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a) $\alpha>1$ donc $\sqrt[n]{\alpha}>1$

D'aprés B)1)a) : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) \le G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) \le f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$; ($\sqrt[n]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}$) et $f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)=f(\alpha)=0$

D'aprés le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)=0.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}-1}{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}.\ln(\alpha)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln(\alpha)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Par la suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}=\ln(\alpha).$

d) $J_n=-G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)+\sqrt[n]{\alpha}\,f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)=0.$
* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha}\,f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha}\,f(\alpha)=1\text{x}0=0$
* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}=\ln(\alpha).$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n=-\ln(\frac{1}{2})-\ln(\alpha)=\ln\left(\dfrac{2}{\alpha}\right).$