Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences de l'informatique*)

Session principale 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Résolution d'équations du second degré dans IC**

*** Complexe et géométrie**

1) Soit l'équation $(E)\ :\ z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

a) $(1+2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = -3 + 4i$

b) On pose $a = 1\,,\ \ b' = -(1+i)$ et $c = 3 - 2i$

$$\Delta = \left(-(1+i)\right)^2 - (3-2i) = 2i - 3 + 2i = -3 + 4i = (1+2i)^2$$

d'où $\begin{cases} z_1 = \dfrac{1+i-(1+2i)}{1} = -i \\ z_2 = \dfrac{1+i+(1+2i)}{1} = 2+3i \end{cases}$

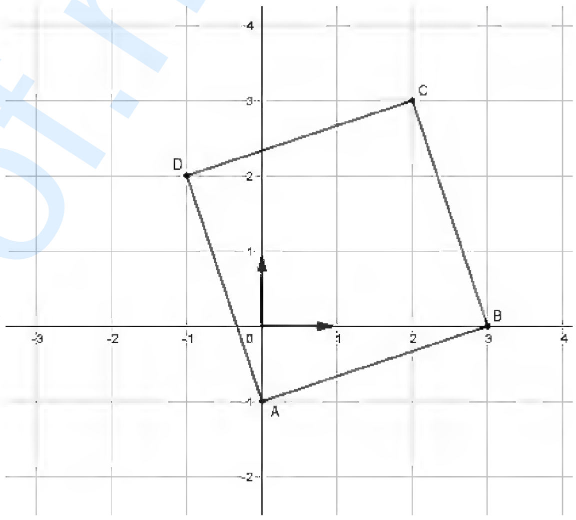
Par suite $S_{\mathbb{C}} = \{\,-i\,,\ 2+3i\,\}$

2) a) $z_A = -i \implies A(0,-1)$

$z_B = 3 \implies B(3,0)$

$z_C = 2 + 3i \implies C(2,3)$

$z_D = -1 + 2i \implies D(-1,2)$



b) $|z_C - z_A| = |2 + 3i + i| = |2 + 4i| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_D - z_B| = |-1 + 2i - 3| = |-4 + 2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B}) = (2+4i)(\overline{-4+2i}) = (2+4i)(-4-2i) = -8 - 4i - 16i + 8 = -20i$

d) $|z_C - z_A| = |z_D - z_B| \Leftrightarrow AC = BD$

$(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B})$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

$z_B - z_A = 3 + i$

$z_C - z_D = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$

Donc $z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et isométriques donc est un carré.

$\text{aire (ABCD)} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10\ \text{u.a}$

Exercice 2 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Fonction en logarithme népérien**

*** Fonction auxiliaire**

*** Calcul d'aires**

1) a) g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$.

$g'(x) = 0 \text{ sig } \frac{2x^2-1}{x} = 0$

$\text{sig } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x > 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après le tableau de variation de g on a :

Pour tout $x > 0$, $g(x) > g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{2} > 0.$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x + 1 = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

La droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

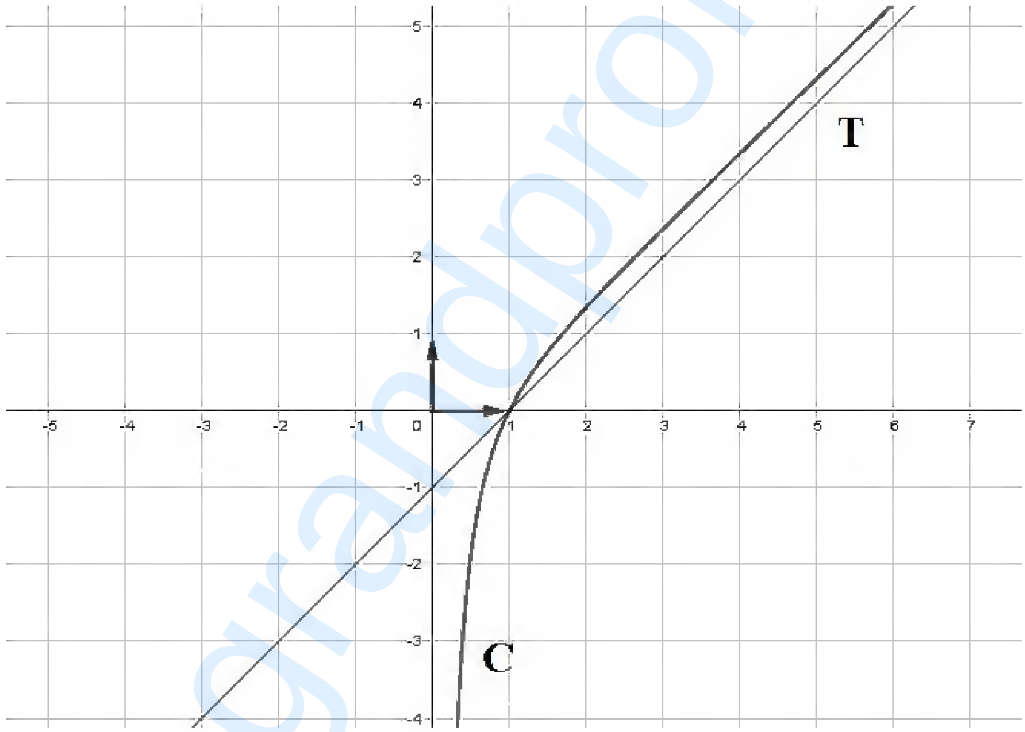
d) Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

e) $f(x) - (x-1) = \frac{\ln x}{x}$ et $T : y = x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-1)$	‖	T/C	|	C/T	

Représentation graphique :



3) aire $= \int_1^2 f(x) - (x-1)dx \times 9 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \times 9 = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 \times 9 = \frac{9}{2}(\ln 2)^2 \text{ cm}^2$

Exercice 3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Matrices, déterminants et systèmes de trois équations à trois inconnues**
- **Lecture graphique**
- **Fonctions primitives et calcul d'aires**

1)a) $\det(A) = -4 \neq 0$ alors la matrice A est inversible.

b) $A \times B = -4\, I_3$ alors $A^{-1} = -\frac{1}{4} B$

2) Par lecture graphique on a :

a) $f(1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$, $f(-1) = e$ et $f'(-1) = -2\,e$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

3) a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ qui est dérivable sur IR .

et $f'(x) = (-2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$

$= (-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))\, e^{-x}$

b) $f(1) = (a + b + c)e^{-1} = 3e^{-1} \Longrightarrow a + b + c = 3$

$f(-1) = (a - b + c)e = e \Longrightarrow a - b + c = 1$

$f'(-1) = (-a - 2a + b + b - c)e = -2e \Longrightarrow -3a + 2b - c = -2$

Par conséquent les réels a, b et c vérifient le système :

$$(S)\ \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 1 \\ -3a + 2b - c = -2 \end{cases}$$

c) $(S) \Leftrightarrow A \times X = C$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

4)a) $F(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$ est dérivable sur IR ,

et $F'(x) = (-2x - 3)e^{-x} + (-x^2 - 3x - 4)(-e^{-x})$

$= (-2x - 3 + x^2 + 3x + 4)e^{-x}$

$= (x^2 + x + 1)e^{-x} = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur IR.

b) l'aire : $A = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{8}{e} + 4 = 4 - \frac{8}{e}$ u.a

Exercice 4 :

De quoi s'agit -il ?

*** Division euclidienne,**

*** congruences**

1) a)

r	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de 2^r par 5	1	2	4	3	1
Le reste de la division euclidienne de 3^r par 5	1	3	4	2	1
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5	2	0	3	0	2

b) $2^4 \equiv 6 \equiv 1\ [5]$ d'où pour tout entier q , $2^{4q} \equiv 1\ [5]$

$3^4 \equiv 1\ [5]$ d'où pour tout entier q , $3^{4q} \equiv 1\ [5]$

2) a) Les valeurs possibles de r sont : 0, 1, 2 ou 3.

b) Si $k = 4n$ alors $2^k + 3^k \equiv 2\ [5]$

Si $k = 4n + 1$ alors $2^k + 3^k \equiv 0\ [5]$

Si $k = 4n + 2$ alors $2^k + 3^k \equiv 3\ [5]$

Si $k = 4n + 3$ alors $2^k + 3^k \equiv 0\ [5]$

3) a) Pour $k \geq 1$, 2^k est pair et 3^k est impair puisque $3 \equiv 1[2]$

donc $3^k \equiv 1[2]$ par suite $2^k + 3^k$ est impair.

b) Le chiffre des unités de $2^k + 3^k$ est 3, 5 ou 7.

4) Le chiffre des unités de $2^{2017} + 3^{2017}$ est 5.