

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session de contrôle 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

$$1^{\circ}) \text{ a) } \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}. \text{ Ainsi } E(3,3,3).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{k}. \text{ Ainsi } D(3,0,3).$$

$$\text{b) } \Rightarrow \Omega = C * D \text{ signifie } \Omega \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2} \right) \text{ donc } \Omega \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

$$2) \text{ a) } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } V_{(O A E G)} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AO}| \text{ avec } \overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} |-27 + 0 + 0| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

$$3) \text{ a) } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (CD)$$

Donc $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$ et \overrightarrow{CD} sont colinéaires, ainsi $P \perp (CD)$.

$$\text{b) Soit } P': x - y - z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3 - 0 + 0 - 3 = 0 \text{ donc } A \in P'.$$

$$\Rightarrow 3 - 3 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } E \in P'.$$

$$\Rightarrow 0 - 0 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } G \in P'.$$

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P: x - y + z - 3 = 0$.

$$\text{Autrement: } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P, \text{ donc } P: 9x - 9y + 9z + d = 0,$$

$$\text{Or } A(3,0,3) \in P \text{ signifie } 9 \times 3 - 9 \times 0 + 9 \times 3 + d = 0 \text{ signifie } d = -27$$

$$\text{Donc } P: 9x - 9y + 9z - 27 = 0 \text{ signifie } P: x - y + z - 3 = 0.$$

$$4) \text{ a) } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

$$\text{signifie } (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

signifie $(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $P: x - y + z - 3 = 0$ donc $d(\Omega, P) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega, P) = R$. Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x, y, z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

$$\text{Signifie } \begin{cases} H \in P \\ H \in D\left(\Omega, \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} \frac{3}{2} + \alpha - \frac{3}{2} + \alpha + \frac{3}{2} + \alpha - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Ainsi } H(2, 1, 2)$$

Exercice 2 :

De quoi s'agit-il ?

- Racines cubiques d'un nombre complexe donné
- Construction de points $M(z)$ sachant $|z|$ et $\arg(z)$
- Complexe et géométrie

A/

1) a) $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

b) $Z^3 = 2\sqrt{2}i = (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z = 2\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$.

Signifie $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$ sont

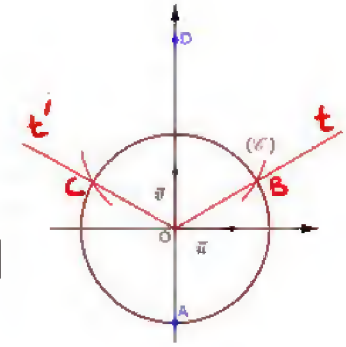
$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$2) \text{ a) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B| = \sqrt{2} \\ \arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie $B \in \zeta \cap [Ot)$ où $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C| = \sqrt{2} \\ \arg(z_C) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie $C \in \zeta \cap [Ot')$ où $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot'}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.



$$\text{b) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Autrement : } \Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\overline{z_B}$$

$$= -\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \Rightarrow z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = -\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow z_{\overline{AD}} = z_D - z_A = 3\sqrt{2}i$$

$$\text{Donc } \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{BC}}} = -\sqrt{3}i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}. \text{ Ainsi } (BC) \perp (AD).$$

Autrement : $z_C = -\overline{z_B}$ signifie $S_{(0, \vec{v})}(B) = C$ signifie $(O, \vec{v}) \perp (BC)$

Or $(O, \vec{v}) = (AD)$, Ainsi $(BC) \perp (AD)$.

$$\text{d) } \Rightarrow z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z_{\overline{BD}} = z_D - z_B = 2\sqrt{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Donc $z_{\overline{AC}} = z_{\overline{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC) \perp (AD)$;

Ainsi ABDC est un losange.

$$\text{B/ 1) a) } \Rightarrow z_N^3 = \left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = \alpha^3 e^{i2\pi} = \alpha^3$$

$$\Rightarrow z_P^3 = \left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)^3 = \alpha^3 e^{-i2\pi} = \alpha^3$$

$$\text{b) } \Rightarrow z_N^3 = z_P^3 = \alpha^3$$

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul α^3 sont z_N, z_P et z_M

et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) \Rightarrow MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et $MN = MQ$ signifie MNQP est un parallélogramme (car MNP est un triangle équilatéral)

signifie $Z_{\overline{MN}} = Z_{\overline{PQ}}$ signifie $Z_N - Z_M = Z_Q - Z_P$ signifie $Z_Q = -Z_M + Z_P + Z_N$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie $\alpha^3 = -2\alpha$.

b) \Leftrightarrow MNQP est un losange signifie $\alpha^3 = -2\alpha$ signifie $\alpha(\alpha^2 + 2) = 0$

signifie $\alpha^2 + 2 = 0$ car $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie $\alpha^2 = -2$ signifie $\alpha = i\sqrt{2}$ ou $\alpha = -i\sqrt{2}$.

Exercice 3 :

De quoi s'agit-il ?

- **Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique**
- **Fonction réciproque**
- **Résolution d'équations**

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$ et $\ln(x+1) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\lim_{0^+} f = -\infty$.

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote à (\mathcal{C}).

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; $\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

$$c) \lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0. \text{ Ainsi } \lim_{+\infty} f = 1.$$

La droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$;
$$f'(x) = \frac{x \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x) \right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x \in]0, +\infty[$; $1 + \frac{1}{x} > 1$ et $x+1 > 1$

Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$ et $\ln(x+1) > 0$

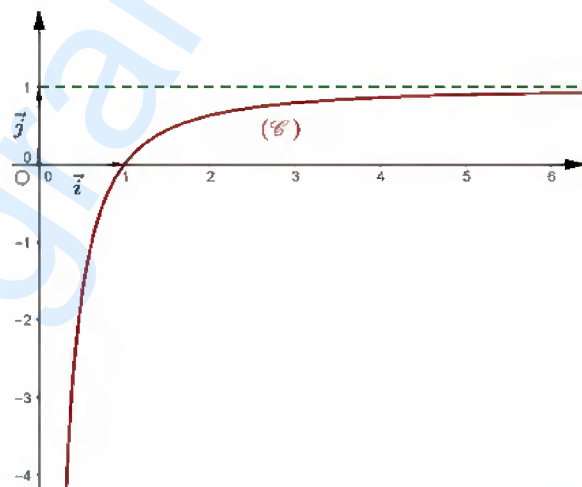
Ainsi $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) > 0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$.

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) > 0$ Par suite f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	1

d)



3) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty, 1[$.

4) a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 1$ car f^{-1} est continue en 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

b) pour tout $n \geq 2$; $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n) = \frac{1}{n}$

signifie $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n + 1)} = \frac{1}{n}$

signifie $n \ln(a_n) = \ln(a_n + 1)$

signifie $\ln((a_n)^n) = \ln(a_n + 1)$

signifie $(a_n)^n = a_n + 1$.

Ainsi a_n est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + 1) = 2$.

Exercice 4 :

De quoi s'agit-il ?

- Lecture graphique
- Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle
- Modélisation

1) a) $f(0) = 0$; $f'(0) = \frac{+1}{+2} = \frac{1}{2}$.

b) f est solution de l'équation $y' = ay + b$ donc $f'(x) = af(x) + b$, pour tout réel x .

d'où $f'(0) = af(0) + b$ ainsi ; $b = f'(0) = \frac{1}{2}$.

2) a) f solution de l'équation : $y' = ay + \frac{1}{2}$

Donc $f'(x) = af(x) + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Signifie $af(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$ signifie $f(x) = \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right)$ car $a \neq 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right)$.

b) S est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } S &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{a} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{a} (f(4) - 2 - (f(0) - 0)) = \frac{1}{a} (2 - 2e^{-1} - 2) = \frac{-2e^{-1}}{a}. \end{aligned}$$

c) On a $S = \frac{-2e^{-1}}{a} = 8e^{-1}$ signifie $a = \frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}} = -0,25$.

3) f solution de l'équation différentielle $y' = -0,25y + \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } f(x) = ce^{-0,25x} - \frac{\frac{1}{2}}{-0,25} = ce^{-0,25x} + 2.$$

Or $f(0) = 0$ signifie $c + 2 = 0$ signifie $c = -2$

Ainsi $f(x) = 2 - 2e^{-0,25x}$.

4) a) $h(3) = 2 - 2e^{-0,25 \times 3} = 2 - 2e^{-0,75} \approx 1,05\text{m}$.

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

b) $h(t) > 1,98$ signifie $2 - 2e^{-0,5t} > 1,98$ signifie $2e^{-0,5t} < 0,02$ signifie $e^{-0,5t} < 0,01$

$$\text{signifie } -0,5t < \ln(0,01) \text{ signifie } t > -\frac{\ln(0,01)}{0,5} \approx 18,42.$$

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.