MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
Lycée de Nkolnda-Nsimalen
Baccalauréat BLANC

Année scolaire : 2009-2010
Série : C **Durée : 4 heures**
Session de MAI 2010
Coef : 05

Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **Romaric Tchapnga**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **4,5 points**

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4. 1,5 pt
2. On considère les événements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'événement B_n. 0,5 pt
   b. Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n. 0,5 pt
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et
   vérifier l'égalité $p_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. 1 pt
3. On pose : $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : :
   $S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2}+1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. 0,75 pt
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n). 0,25 pt

EXERCICE II **4,5 points**

1. Le plan est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit f l'affinité orthogonale de rapport 2 et d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et (C) un cercle de centre $A(1\,;\,1)$ et de rayon 2.
   a. Déterminer l'expression analytique de f. 1 pt
   b. Montrer que l'image du cercle (C) par f est une conique dont on déterminer l'équation réduite et l'excentricité. 1,5 pt
2. Θ un nombre réel tel que $0 \leq \Theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. On considère l'équation différentielle
   (E) : $(1+\cos 2\Theta)\, y'' - (2\sin 2\Theta)\, y' + 2y = 0$.
   a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $(1+\cos 2\Theta)\, z^2 - (2\sin 2\Theta)\, z + 2 = 0$. 0,75 pt

b. Écrire chaque solution sous forme exponentielle. 0,5 pt

c. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation : $y = x + 1$. 0,75 pt

PROBLEME **11 points**

Le problème comporte trois parties liées A, B et C.

Partie A : Soient les fonctions f et h définies par $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5 pt
   En déduire que la courbe (C_f) de f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations. 0,25 pt
2. Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. 0,5 pt
3. Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses. 0,5 pt
4. On pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$ avec $x > 0$.
   a. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation. 1 pt
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;4[$. Donner un encadrement de la solution α appartenant à $]2\,;4[$ d'amplitude 10^{-1}. 0,75pt
   c. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$. 0,5 pt
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ en déduire que (C_f) et (C_h) se coupent en deux points. ((C_h) étant la courbe représentative de h). 0,5 pt
6. Montrer que pour tout $x \geq 4$, on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. 0,5 pt
7. Trace les courbes (C_f) et (C_h) dans un repère même orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. 1 pt

Partie B :

1. Doit D_f la partie du plan définie par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. ($\alpha$ est le réel défini à la partie A).
   a. Calculer en unités d'aires, en utilisant une intégration par parties, l'aire $A(\alpha)$ de D_f..0,5 pt
   b. Montrer que $A(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-1} près. 0,5 pt
   c. On fait tourner le domaine D_f autour de l'axe des abscisses. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer en unités de volume, le volume du volume du solide de revolution obtenu. 1 pt
2. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.
   a. Montrer que, pour tout $n \geq 4$, on a : $0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. 0,5 pt
   b. En déduire que la suite (I_n) converge et préciser sa limite. 0,5 pt
   c. On pose $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite. 0,5 pt

Partie C : On considère pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^{2n}}$

1. Déterminer la dérivée f'_n de f_n. 0,5 pt
2. On désigne par x_n la solution de l'équation $f'_n(x) = 0$.
   a. Déterminer le réel x_n en fonction de n. 0,5 pt
   b. Calculer la limite de la suite (x_n). 0,25 pt