Correction du sujet de bac
session principale 2010
Section Mathématiques

Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

1) **Faux**

$-23 = (-5)\times 5 + 2$ avec $0 \leq 2 \leq |-5|$ donc le quotient de (-23) par (-5) est 5

2) **Vrai**

Soit $d = b \wedge 64$.

d divise b et divise 64 $\rightarrow$ d divise 9b et d divise 64a et par suite d divise 64a+9b

alors d divise 1 d'où d=1

3) **Faux**

$147 \equiv 3 \pmod{12}$ donc $147^n \equiv 3^n \pmod{12}$

n	1	2	3	4	5	6
$3^n \pmod{12}$	3	9	3	9	3	3

On remarque (on peut le montrer par récurrence) que:

$3^n \equiv \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 9 & \text{si } n \text{ est pair } (n>0) \end{cases}$ mod 12. Donc $147^{146} \equiv 3^{146} \equiv 9 \pmod{12}$

4) **Faux**

Il suffit de prendre 4 comme contre exemple.

$4^2 = 16 \equiv 0 \pmod 8$, mais $4 \not\equiv 0 \pmod 8$

5) **Vrai**

$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \equiv 0 \pmod 4 \\ x+1 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$ donc $x+1 \equiv 0 \pmod{20}$ car $4 \wedge 5 = 1$

D'où $x \equiv -1 \equiv 19 \pmod{20}$

6) **Vrai**

p premier distinct de 2 alors p est impair c-à-d p=2k+1

$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k)+1$ donc $p \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice n°2

1) $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{ME}) \equiv (\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ME}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv 0 \quad [\pi]$

Donc les points M, F et E sont alignés.

2) a) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \not\equiv 0 \quad [2\pi]$ donc $r_1 o r_2$ est une rotation d'angle π ou encore une symétrie centrale. En plus on a $r_1 o r_2(I) = r_1(r_2(I)) = r_1(J) = I$ car $BI = BJ = AI = AJ$

et $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Donc I est le centre de cette symétrie centrale.

b) $r_1 o r_2(E) = r_1\left(r_2(E)\right) = r_1(M) = F$ Donc I est le milieu du segment $[EF]$

Alors on peut dire que si M varie, la droite (EF) passe par le point fixe I.

3) a) on a $\begin{cases} AK = \sqrt{2}AM \\ (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AK}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$ donc $S(M) = K$.

b) G est l'unique point tel que le triangle AFG est un triangle direct isocèle et rectangle en F. (Voir figure)

b) On a: $AK = AG = \sqrt{2}AF$ donc le triangle GAK est isocèle en A

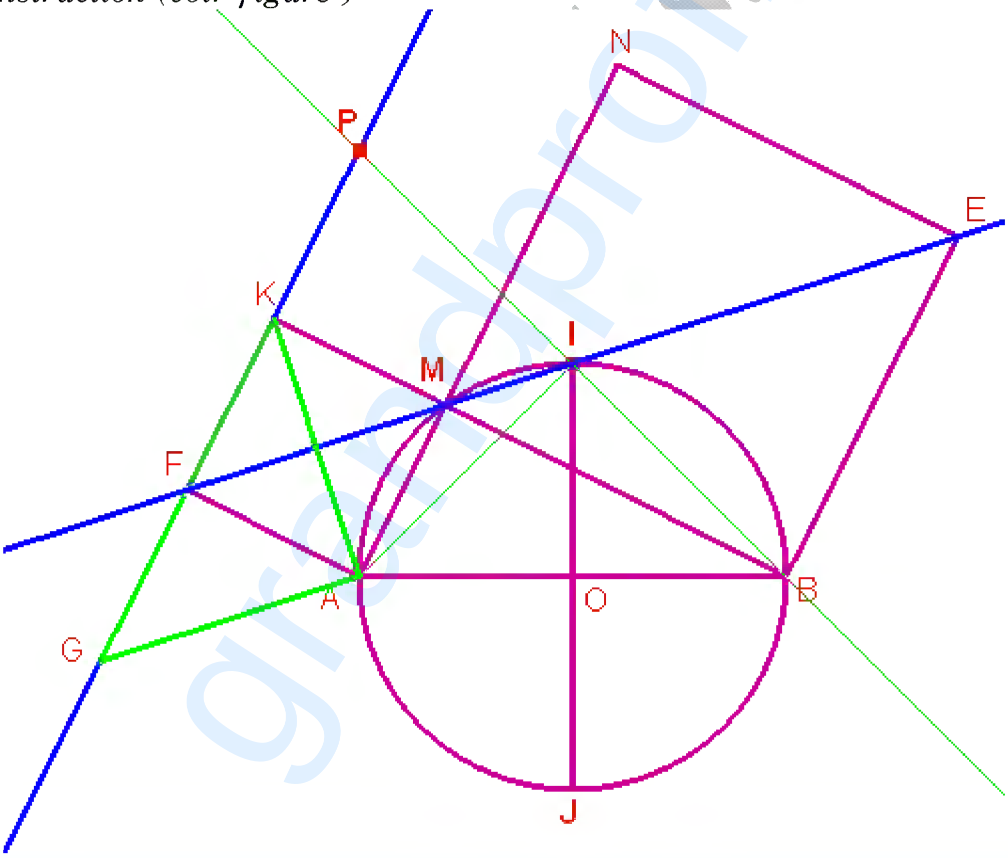
en plus $(AF) \perp (FK)$ et $(AF) \perp (FG)$ ce qui permet de dire que $F \in (KG)$ et que $[AF]$ est la hauteur du triangle isocèle GAK issue de A

D'où F est le milieu du segment $[KG]$.

c) On a $I \in (MF) \Rightarrow S(I) \in S\left((MF)\right)$ or $S\left((MF)\right) = \left(S(M)S(F)\right) = (KG) = (KF)$

Donc si M varie, la droite (KF) passe par le point fixe $P = S(I)$

Pour la construction (voir figure)



Exercice n°3

(E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$

$\alpha \in \mathbb{C}^*$ et les point A,M,N et P d'affixes respectives $-2, \alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les affixes des points M, N et P sont des réels donc ces points sont alignés sur l'axe des abscisses.

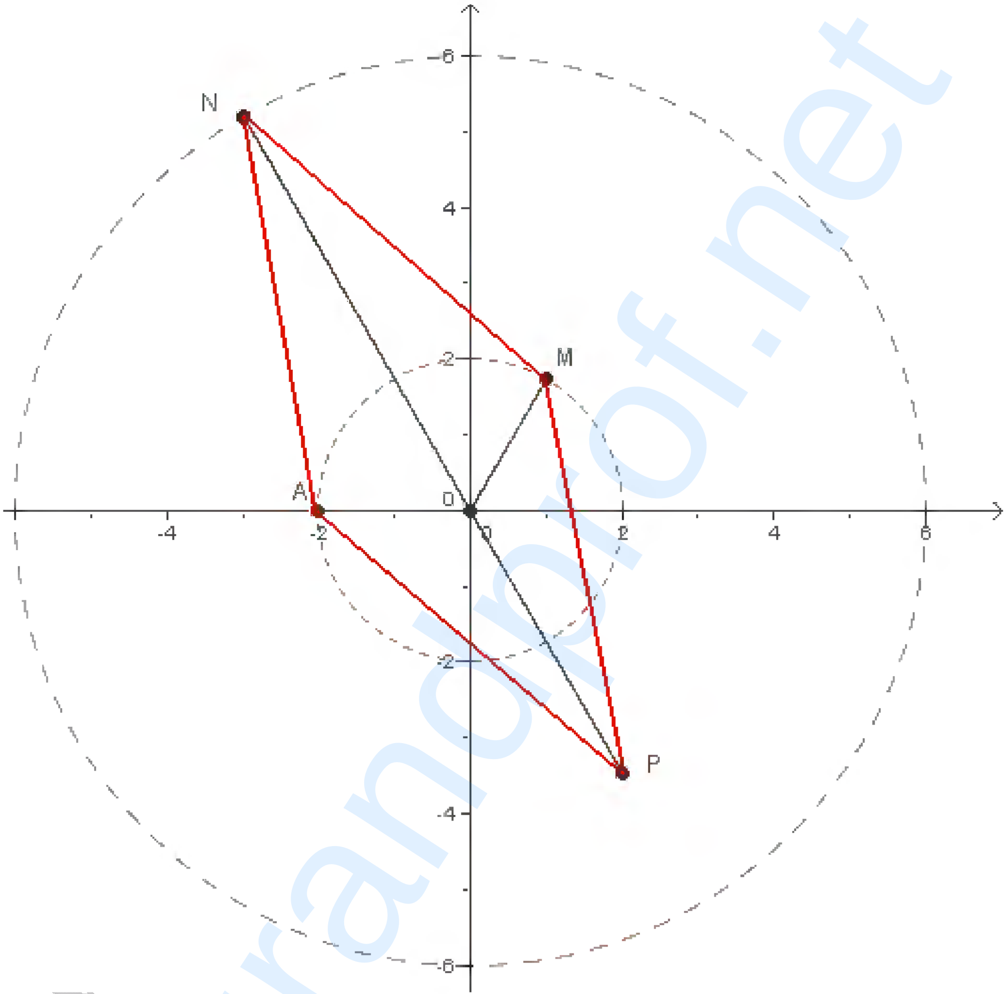
2) MNAP est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^3 - \alpha^2 = -2\alpha - 8 \Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$$

Donc α est une solution de (E).

3) $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

a) $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\quad \frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}\left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $\quad \frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$



b) $\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}(-2+2i\sqrt{3}) = -3 + 3i\sqrt{3}$

$\frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$

. $Aff(\overrightarrow{AP}) = 2 - 2i\sqrt{3} + 2 = 4 - 2i\sqrt{3}$; $Aff(\overrightarrow{NM}) = 1 + i\sqrt{3} + 3 - 3i\sqrt{3} = 4 - 2i\sqrt{3}$

$Aff(\overrightarrow{AP}) = Aff(\overrightarrow{NM})$ *en plus les points ne sont pas alignés donc MNAP est un parallélogramme.*

4) α est une solution de (E) $\Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow \overline{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16} = 0$

$\Leftrightarrow 3\overline{\alpha}^3 - 2\overline{\alpha}^2 + 4\overline{\alpha} + 16 = 0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}$ *est une solution de (E)*

b) Si MNAP est un parallélogramme alors α *est solution de (E) .*
Les solutions de (E) sont $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$ *et une troisième solution qui est nécessairement réelle. Or* α *n'est pas réel, il en résulte que : Si MNAP est un parallélogramme alors* $\alpha = 1+i\sqrt{3}$ *ou* $\alpha = 1-i\sqrt{3}$
Pour $\alpha = 1+i\sqrt{3}$ *, MNAP est un parallélogramme*
Il reste à vérifier , pour $\alpha = 1-i\sqrt{3}$ *, que MNAP est un parallélogramme*

Exercice n°4

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x\ln x + x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

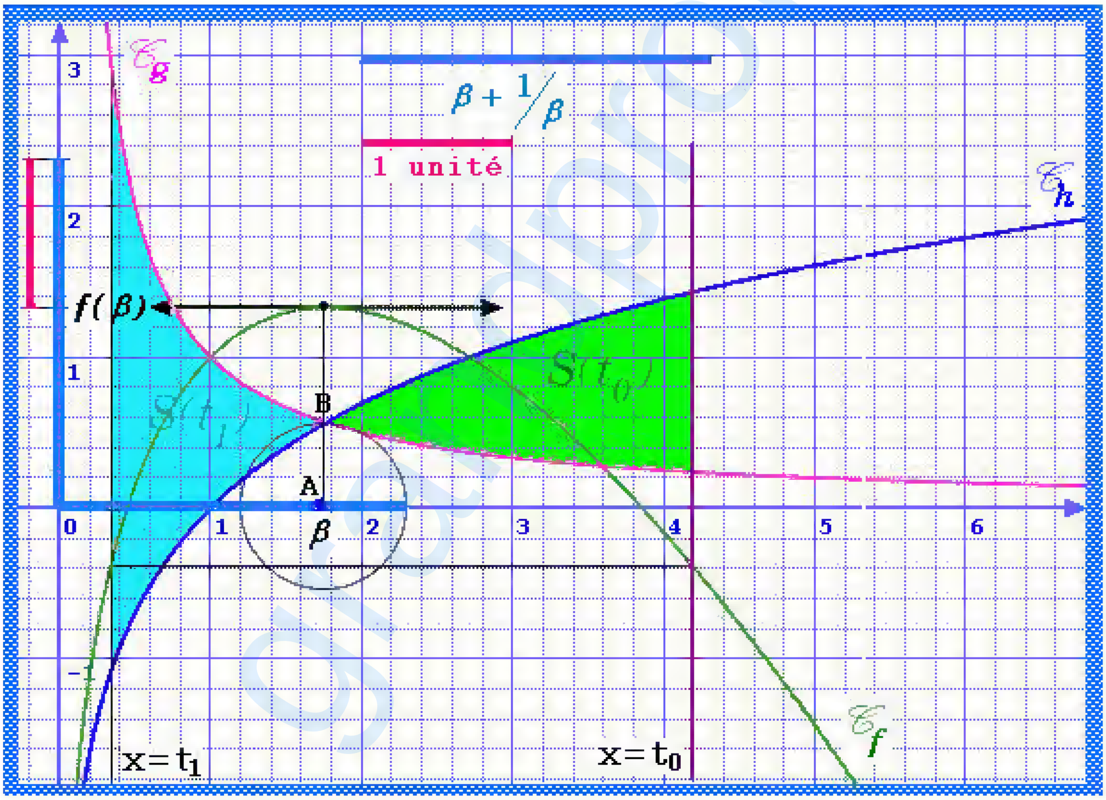
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - x\ln x + x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty \ .$$

b) Soit $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \left(\ln x + x\dfrac{1}{x}\right) + 1 = \dfrac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

2)



Pour $x \in \left]0,\beta\right]$; $\dfrac{1}{x} \geq \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x \geq 0$

$x \in \left[\beta,+\infty\right[$; $\dfrac{1}{x} \leq \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x \leq 0$

b) f est strictement croissante sur $\left]0,\beta\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\beta,+\infty\right[$.

c) $f'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} = \ln\beta$ donc $f(\beta) = \ln\beta - \beta\ln\beta + \beta = \dfrac{1}{\beta} - \beta\dfrac{1}{\beta} + \beta = \beta + \dfrac{1}{\beta} - 1$

3) a) $f(x) - h(x) = -x\ln x + x = x(1 - \ln x)$.

x	0	e	$+\infty$
$f(x)-h(x)$	$+$	0	$-$
Position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$	$\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_h$		$\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_h$

b)

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow -\infty$

On a $f(\beta) \geq h(\beta) > 0 \Rightarrow f(\beta) > 0$.

f est continue et strictement croissante (resp strictement décroissante) sur l'intervalle $]0,\beta]$ (resp $[\beta,+\infty[$) donc elle réalise une bijection de $]0,\beta]$ (resp $[\beta,+\infty[$) sur $]-\infty, f(\beta)]$. Or $0 \in]-\infty, f(\beta)]$ donc il existe et unique $(x_1, x_2) \in]0,\beta] \times [\beta,+\infty[$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [0,4;0,5] \\ f(0,4)\times f(0,5) \simeq (-0,1)\times(0,1) < 0 \end{cases}$ donc $x_1 \in]0,4;0,5[$

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [3,8;3,9] \\ f(3,8)\times f(3,9) \simeq (0,06)\times(-0,04) < 0 \end{cases}$ donc $x_2 \in]3,8;3,9[$

c) Voir figure

d) Voir figure

4) a) Premier cas: $t \in]0,\beta[$

$$A(t) = \int_t^\beta |h(x) - g(x)|\,dx = \int_t^\beta (g(x) - h(x))dx = \int_t^\beta f'(x)dx = f(\beta) - f(t)$$

Deuxième cas : $t \in]\beta,+\infty[$

$$A(t) = \int_\beta^t |h(x) - g(x)|\,dx = \int_\beta^t (h(x) - g(x))dx = -\int_\beta^t f'(x)dx = f(\beta) - f(t)$$

b) Voir figure

c) $A(t_1) = A(t_0) \Leftrightarrow f(t_1) = f(t_0)$