Exercice .1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$
2) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) On pose $J=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,\cdot)$
3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
4) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right) \quad ; \quad \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) On pose $E^*=E-\{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$
   c) En déduire que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.
5) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

Soit m un nombre complexe.

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : (E_m) : $z^2+(im+2)z+im+2-m=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
   b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
2) Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$.

1) Soit R la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'.
   a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R.
   b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que $A=R(B)$.
2) a) Vérifier que : $m'-a=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$.
   b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.
   c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice .3

Soit p un nombre premier tel que $p=3+4k \quad (k\in\mathbb{N}^*)$.

1) Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv1\,[p]$ alors $x^{p-5}\equiv1\,[p]$
2) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv1\,[p]$.
   a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.
   b) Montrer que : $x^{p-1}\equiv1\,[p]$.
   c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$

3) Résoudre dans Z l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss1

Partie :I

1) a) Montrer que: $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$. 0,5 pts

b) On pose $u^2 = t$ Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{t}{1+\sqrt{u}}du$. 0,5 pts

c) En déduire que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ 0,5 pts

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. 0,25 pts

Partie :II

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$; $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,25 pts

b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

2) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis vérifier que : $f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ 0,75 pts

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

c) Vérifier que : $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$ 0,5 pts

3) Construire la courbe (C_f) et la demi-tangente à droite au point 0 dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 0,5 pts

Partie :II

1) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$

a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 0,5 pts

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$. 0,5 pts

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

2) Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par: $U_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n > 0$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. 0,5 pts

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$. 0,5 pts

d) En déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge vers a . 0,25 pts

On considère la fonction $\mathbf{F}$ définie sur $\mathbf{IR}$ par : $\mathbf{F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt}$.

1) Montrer que la fonction $\mathbf{F}$ est continue et strictement croissante sur IR . 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\mathbf{F(x)\geq x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{F(x)}$ 0,5 pts

b) Montrer que F est impaire , en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{F(x)}$ 0,5 pts

c) Montrer que $\mathbf{F}$ est une bijection de $\mathbf{IR}$ vers $\mathbf{IR}$. 0,5 pts

d) Montrer que la bijection réciproque $\mathbf{G}$ de la fonction F est dérivable enO, puis calculer : $\mathbf{G'(0)}$ 0,5 pts

Bon Courage

inter-maths