Examens
d' Excellence

Mathématiques

MAROC

Nouvelle
édition

2015N
2015R
2016N
2016R
2017N
Blanc1
Blanc2

2 BacSM
MATHS 2018

Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2018

Préface

Louanges à ALLAH seul,

Ce document vient pour combler une des lacunes que connaît la filière SM en matière de rareté des livres traitant les sujets d'examens de Maths en terminal. Je l'ai conçu, et rédigé, volontairement dans le but d'aider les élèves du Maroc et d'ailleurs à concevoir une image approximative sur les attendus du programme.

Avant de partir passer cet examen national, vous êtes censés connaître toutes les techniques, les astuces, les trucs, les méthodes, les algorithmes, les procédures et les réponses typiques à toutes les questions typiques que vous allez apercevoir tout au long de ce document. Là-bas, le jour de l'examen en salle, vous n'avez rien à faire que de choisir la bonne méthode comme réponse à la question adéquate qui convient. Malheureusement, il y en a encore beaucoup d'élèves qui ne croient absolument en cette stratégie « d'apprendre par cœur » les procédés classiques et les méthodes typiques. Mais la vérité c'est que vous aurez 360 minutes comme masse horaire pour répondre à près de 40 questions, soit 9 minutes en chaque question ☹.

Après cinq mois de travail dur est tenace, me voilà prêt à vous proposer ma méthodologie de préparation pour s'entraîner bien, et pour répondre aisément aux questions de l'examen national. J'ai proposé seulement sept sujets comme plateforme de travail. Et je crois que c'est tant suffisant. Mais si vous en voulez plus, consultez l'édition 2014 que j'ai détaillée et rédigée en arabe. Par la suite, voici quelque conseils à suivre pendant vos révisions, et pour vous aider à aborder sereinement les épreuves écrites de juin 2018, et ainsi mettre toutes les chances de votre coté pour décrocher votre précieux Bac ☺.

Pour réussir cet examen, il faut aimer travailler les maths au premier abord. Et ce n'est pas du tout banal que quelqu'un débute toujours l'année avec motivation. Faire des fiches qui récapitulent l'essentiel du cours et utiliser des moyens mnémotechniques à fin d'en faire un vrai capital mémoire.

Savoir bien gérer son temps en se fixant des délais et en s'accordant des pauses. On ne retient bien que ce qu'on aime. Et généralement, On aime bien les matières où on a eu de bonnes notes ☺. Partant de ce principe, j'estime qu'il faut se motiver d'autant plus pour les matières où l'on se sent moins à l'aise (les arithmétiques comme exemple ☹). Il s'agit d'installer un cercle vertueux dès le début de l'année si l'on se plonge dans une matière avec passion, alors on va mieux retenir, mieux restituer et avoir de bons résultats. Ce qui permet d'associer une image positive à l'examen tout entier ☺.

Un bon étudiant est celui qui connaît sa grille d'évaluation et les cadres référentiels des examens. Savoir ce que l'on attend de vous en Maths (connaissances et compétences), vous aidera à voir quoi mettre en avant, à anticiper les questions.
Et c'est d'ailleurs mon premier but derrière ce document.

Dans un examen, il y a une part de stratégie puisqu'il faut convaincre l'examinateur (ou directement le correcteur). Comprendre ce qu'on attend de vous est très primordial, car dans l'examen du baccalauréat vous êtes amenés, sans qu'on le dit institutionnellement, vous êtes censés de recracher le cours sous diverses formes : algorithmes, théorèmes, applications, méthodes, procédés etc…

Certains élèves commencent à réviser dés le mois de Mars, alors que d'autres attendent le mois de Mai pour se plonger dans leurs livres en prévision des examens de fin d'année. Mais peu importe la stratégie, il faut savoir que la réussite à ces épreuves ne dépend

Ne dépend pas que de la qualité du travail de révision.
La préparation mentale y joue également un grand rôle. Savoir chasser le stress et gérer son temps est aussi important que d'arriver à assimiler le cours des mathématiques tout entier.

Souvent, les sujets des examens, notamment à l'écrit, sont liés de près ou de loin à l'actualité. En plus de vous donner des indications claires sur les éventuels sujets. Travailler les sujets des années dernières permet d'enrichir vos connaissances, de confirmer que vous êtes curieux et que vous avez déjà une expérience cumulée.

Un examen, c'est comme une épreuve sportive ! si l'on arrive sans énergie, alors on est sûr de rater son départ ou de ne pas arriver jusqu'au bout. Le moral c'est qu'il est important de bien manger de bonnes Msimnates de la chère maman et de bien dormir, notamment dans les derniers jours précédents les épreuves ☺.
L'alimentation permet de fournir de l'énergie, le sommeil aussi, en plus de permettre au cerveau de récupérer et d'enregistrer toutes les informations acquises dans la journée. Je vous conseil aussi de s'aérer l'esprit en faisant du sport.

Enfin, il importe d'aborder l'épreuve de façon positive, de se présenter à l'examen prêt à faire de son mieux tout en étant conscient que la partie ne sera pas facile ☹. Il faut savoir que visualiser la réussite peut influencer et programmer le sucés dans l'inconscient, autant mettre toutes les chances de son côté ☺.
Je souhaite que ce document aide à achever tous vos buts.
Louanges à ALLAH seul et bénédiction et salut soient sur son prophète MOHAMED.

Bon courage.

SOMMAIRE

التمرين الأول : (3,0 ن)

1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E) :\; z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

أ 1 — 0,25 ن — تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E).

ب 1 — 0,50 ن — حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن $b\epsilon\mathbb{R}$)

ج 1 — 0,25 ن — تحقق أن : $b=(1-i\sqrt{3})a$

2 المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B النقطتان ذواتا اللحقين a و b على التوالي.

أ 2 — 0,50 ن — حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب 2 — 0,50 ن — بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$.

ج 2 — 0,50 ن — تحقق أن : $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

د 2 — 0,50 ن — لتكن C نقطة، لحقها c، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB و تخالف O و A. حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1 — 0,25 ن — علما أن : $1436\times 1051-2015\times 749=1$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما.

2 ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015 .

أ 2 — 0,50 ن — بين أن d يقسم 1436.

ب 2 — 0,50 ن — استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما.

أ 3 — 0,75 ن — باستعمال مبرهنة فيرما بين أن :

$$x^{1440}\equiv 1[5] \quad \text{و} \quad x^{1440}\equiv 1[13] \quad \text{و} \quad x^{1440}\equiv 1[31]$$

(لاحظ أن : $2015=5\times 13\times 31$)

ب 3 — 0,50 ن — بين أن $x^{1440}\equiv 1[65]$ ثم استنتج أن : $x^{1440}\equiv 1[2015]$.

4 — 0,50 ن — بين أن : $x\equiv 1051[2015]$.

التمرين الثالث : (4,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع : $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة : $E=\{M(x)\,;x\epsilon\mathbb{R}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ;\ M(x)\ \top\, M(y) = M(x+y+1)$$

1 ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بـ : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) = M(x-1)$

0,50 ن	1 أ	بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\top)$.
0,50 ن	1 ب	بين أن $(E,\top)$ زمرة تبادلية.
0,50 ن	2 أ	بين أن : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2\ ;\ M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$
0,50 ن	2 ب	استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في E .
0,50 ن	2 ج	بين أن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $\top$ في E .
0,50 ن	2 د	تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في $(E,\top)$. و أن I هو المحايد في $(E,\times)$.
0,25 ن	3 أ	تحقق أن : $\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ;\ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$
0,75 ن	3 ب	بين أن $(E,\top,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x(1+(\ln x)^2)\ ;\ \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

I ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن	I 1	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. ثم أول مبيانيا النتيجة.
0,25 ن	I 2 أ	بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 .
0,50 ن	I 2 ب	أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.
0,50 ن	I 2 ج	أحسب $f'(x)$ من أجل $x > 0$ ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.
0,25 ن	I 3 أ	بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1} .
0,25 ن	I 3 ب	أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$.
0,50 ن	I 3 ج	أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ $e^{-1}\approx 0,4$)

II الجزء الثاني : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = e^{-1} \end{cases}$$

0,50 ن	II 1	بين بالترجع أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ e^{-1}\leq u_n\leq 1$.
0,50 ن	II 2	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.
0,25 ن	II 3 أ	نضع : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = l$. بين أن : $e^{-1}\leq l\leq 1$.
0,50 ن	II 3 ب	حدد قيمة النهاية l .

الجزء الثالث : لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

0,25 ن	III 1 أ	بين أن الدالة $x \to \frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$: دالة أصلية للدالة $h : x \to x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.
0,50 ن	III 1 ب	بين أن : $\int_1^x t\,(\ln t)^2\,dt=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\int_1^x (t\ln t)\,dt$; $(\forall x>0)$
0,50 ن	III 1 ج	استنتج أن : $F(x)=\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}(\ln x)^2$; $(\forall x>0)$
0,25 ن	III 2 أ	بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$.
0,50 ن	III 2 ب	أحسب $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \ ; \ \forall x>0 \\ g(0)=\ln 2 \end{cases}$$

0,50 ن	1 أ	بين أن : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$; $(\forall x>0),(\forall t\in[x,2x])$
0,50 ن	1 ب	بين أن : $e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$; $(\forall x>0)$
0,25 ن	1 ج	استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .
0,75 ن	2	بين أن g قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $g'(x)$ من أجل $x>0$.
0,50 ن	3 أ	بين أن : $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$; $(\forall t>0)$
0,50 ن	3 ب	بين أن : $-1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$; $(\forall x>0)$
0,50 ن	3 ج	استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

التمرين الأول : (4,0 ن)

I نزود $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \ ; \ x * y = x + y - e^{xy} + 1$$

0,25 ن | **I 1** أ | بين أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{R}$.

0,50 ن | **I 1** ب | بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا وجب تحديده .

0,50 ن | **I 2** | علما أن المعادلة $(E) : 3 + x - e^{2x} = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين مختلفين α و β ، بين أن القانون $*$ غير تجميعي.

II نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

لكل x و y من $\mathbb{R}$ نضع $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$.

و ليكن $\mathcal{F} = \{ M(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$.

0,50 ن | **II 1** | بين أن $\mathcal{F}$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 ن | **II 2** | بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

II 3 | نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $\mathcal{F}$ الذي يربط كل عقدي $x + iy$ بالمصفوفة $M(x,y)$.

0,50 ن | **II 3** أ | بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(\mathcal{F}, \times)$.

0,25 ن | **II 3** ب | نضع : $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \{M(0,0)\}$. بين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = \mathcal{F}^*$.

0,25 ن | **II 3** ج | بين أن $(\mathcal{F}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

0,75 ن | **II 4** | بين أن $(\mathcal{F}, +, \times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

I ليكن a من $\mathbb{Z}$ ،

0,50 ن | **I 1** | بين أنه إذا كان a و 13 أوليان فيما بينهما فإن : $a^{2016} \equiv 1[13]$.

I 2 | نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) : \ x^{2015} \equiv 2[13]$. و ليكن x حلا للمعادلة (E) .

0,50 ن | **I 2** أ | بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما .

0,50 ن | **I 2** ب | بين أن : $x \equiv 7[13]$.

0,50 ن | **I 3** | بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\mathcal{S} = \{ 7 + 13k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \}$

II نعتبر صندوقا $\mathcal{U}$ يحتوي على خمسين كرة مرقمة من 1 إلى 50
(لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا كرة من الصندوق.

0,50 ن | **II 1** | ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

II 2 | نسحب عشوائيا كرة من الصندوق، نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق.
نكرر هذه التجربة ثلاث مرات.

0,50 ن | **II 2** | ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة تحمل رقما يكون حلا لـ (E) ؟

التمرين الثالث : (3,0 ن)

		1		نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$
0,25 ن		1	أ	تحقق أن $(1-3i)^2$ هو مميز المعادلة (E) .
0,50 ن		1	ب	حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. (نأخذ z_1 تخيلي صِرف).
0,50 ن		1	ج	بين أن : $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,e^{\frac{i3\pi}{4}}$.
		2		المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطة A التي لحقها z_1 و B النقطة التي لحقها z_2 .
0,25 ن		2	أ	حدد العدد العقدي e لحق النقطة E منتصف القطعة $[AB]$.
0,50 ن		2	ب	ليكن r الدوران الذي مركزه A و قياس زاويته $\frac{-\pi}{2}$. و ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة E بالدوران r. بين أن : $c=\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}i$.
		2	ج	نعتبر النقطة D ذات اللحق $d=1+\frac{3}{2}i$.
1,00 ن		2	ج	بين أن العدد $\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)\times\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)$ حقيقي . ثم اعطا تأويلا هندسيا لذلك .

التمرين الرابع : (6,0 ن)

				ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75 ن		1	أ	أحسب النهايتين التاليتين ثم اعطا تأويلا مبيانيا لهما : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$
0,75 ن		1	ب	بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
0,25 ن		1	ج	بين أن الدالة f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
0,50 ن		2	أ	بين ان النقطة $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.
0,50 ن		2	ب	أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.
0,75 ن		2	ج	أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ و المستقيمات ذات المعادلات الديكارتية التالية : $x=0$ و $x=1$ و $y=0$.
0,75 ن		3	أ	لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f_n(x)=x$ تقبل حلا وحيدا u_n في $]0,n[$.
0,50 ن		3	ب	بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\,,(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$
0,75 ن		3	ج	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.
0,50 ن		3	د	أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الخامس : (4,0 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt$

0,50 ن | 1 | بين أن الدالة g زوجية .

0,75 ن | 2 | بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$. ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,50 ن | 3 أ | باستعمال مكاملة بالأجزاء، تحقق أن :

$$(\forall x > 0) \ ; \ \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \left(\frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2}\right) dt$$

0,75 ن | 3 ب | بين أنه لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا : $|g(x)| \leq \frac{10}{3x}$ ثم استنتج قيمة: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 ن | 4 أ | بين أن : $(\forall x > 0) \ ; \ 0 \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) dt \leq 2x$

(لاحظ أن : $(\forall x > 0) \ ; \ 1 - \cos t \leq t$)

0,50 ن | 4 ب | تحقق أن : $(\forall x > 0) \ ; \ g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) dt$

0,50 ن | 4 ج | استنتج قيمة النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي . لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \quad et \quad E = \{M(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,50 ن — 1 — بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

0,50 ن — 2 — تحقق أن : $M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-yy', xy'+yx')$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$

3 — نضع : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$. و نعتبر التطبيق $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$x+iy \mapsto M(x,y)$$

0,25 ن — 3 أ — بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

0,75 ن — 3 ب — استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1,0)$.

0,50 ن — 4 — بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0,50 ن — 5 أ — أحسب $A \times M(x,y)$ من أجل $M(x,y)$ عنصر من E. حيث : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0,50 ن — 5 ب — استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

I — ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم (a^3+b^3)

0,25 ن — I 1 — بين أن : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$. (لاحظ أن : $171 = 3 \times 57$).

0,25 ن — I 2 — بين أن 173 يقسم العدد a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b .

0,25 ن — I 3 — نفترض أن 173 يقسم العدد a . بين أن 173 يقسم $(a+b)$

0,50 ن — I 4 أ — نفترض أن 173 لا يقسم العدد a. بين أن : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$.

0,50 ن — I 4 ب — بين أن : $b^{171}(a+b) \equiv 0[173]$.

0,50 ن — I 4 ج — استنتج أن 173 يقسم العدد $(a+b)$.

II — نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E) : \ x^3+y^3 = 173(xy+1)$

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E).

نضع $x+y = 173k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

0,25 ن — II 1 — تحقق أن : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$.

0,50 ن — II 2 — بين أن : $k = 1$. ثم استنتج حل المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.
نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث تكون النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمية , ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$.

1	أ	بين أن : $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1$.	0,50 ن
1	ب	استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 .	0,50 ن
2		بين أنه إذا كانت $z_2=\overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي.	0,50 ن
3		نفترض أن z_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث $\alpha\in]0,\pi[$.	
3	أ	أحسب z_2 بدلالة z_1 و α .	0,50 ن
3	ب	استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$.	0,50 ن
4		ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من المجال $]0,\pi[$. نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $(G):6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$	
4	أ	بدون حساب z_1 و z_2 ، تحقق من أن : $z=2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)$	0,50 ن
4	ب	اعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ .	0,50 ن

التمرين الرابع : (7,0 ن)

I	1		بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على $t\to e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي θ محصور بين 0 و x حيث : $e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}$	0,50 ن
I	2	أ	استنتج أن : $1-x<e^{-x}$; $(\forall x>0)$.	0,25 ن
I	2	ب	استنتج أن : $x+1<e^{x}$; $(\forall x>0)$.	0,25 ن
I	2	ج	استنتج أن : $0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$; $(\forall x>0)$.	0,25 ن
II			الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :	

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1} & ;\ \forall x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II	1	أ	بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر.	0,50 ن
II	1	ب	بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.	0,50 ن
II	2	أ	بين أن : $x-\frac{x^2}{2}\le -e^{-x}+1\le x$; $(\forall x\ge 0)$	0,25 ن
II	2	ب	استنتج أن : $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}$; $(\forall x\ge 0)$	0,50 ن
II	3	أ	تحقق أن : $\frac{f(x)-1}{x}=\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)f(x)$; $(\forall x>0)$	0,50 ن
II	3	ب	استنتج أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$. ثم أوّل النتيجة المحصل عليها .	0,75 ن

0,75 ن | 4 | أ | بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و أن : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$

0,50 ن | 4 | ب | استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\ln\big(f(u_n)\big)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0>0 \end{cases}$$

0,50 ن | 1 | بين أن : $u_n>0\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.

0,50 ن | 2 | بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

0,50 ن | 3 | بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(f(x))=x$. ثم حدد النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\right)dt$$

0,50 ن | 1 | أ | أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من المجال I.

0,50 ن | 1 | ب | بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I . و احسب $F'(x)$ لكل x من I

0,25 ن | 1 | ج | بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I.

0,50 ن | 2 | أ | باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع $u=\sqrt{e^t-1}$ ، بين أن :

$$(\forall x\epsilon I)\ ;\ \int_{\ln 2}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\right)dt=2\,Arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$$

0,50 ن | 2 | ب | أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0,25 ن | 3 | أ | بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجالٍ J يتم تحديده.

0,50 ن | 3 | ب | حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على أربع كرات حمراء و أربع كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و أربع كرات زرقاء.

نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U ، إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V. و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V .

نعتبر الأحداث التالية : R_U : " الكرة المسحوبة من الصندوق U حمراء "
B_U : " الكرة المسحوبة من الصندوق U زرقاء "
R_V : " الكرة المسحوبة من الصندوق V حمراء "
B_V : " الكرة المسحوبة من الصندوق V زرقاء "

1 أحسب احتمال كل من الحدثين R_U و B_U . — 0,50 ن

2 أ أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث R_U محقق. — 0,50 ن

2 ب أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث B_U محقق. — 0,50 ن

3 بين أن احتمال الحدث B_V هو $\frac{13}{21}$. — 1,00 ن

4 استنتج احتمال الحدث R_V . — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

نضع $M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$.

و نعتبر المجموعة E التالية : $E=\{M(z)\ ;\ z\in\mathbb{C}\}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\left.\begin{array}{l}\forall z\in\mathbb{C}\\ \forall z'\in\mathbb{C}\end{array}\right| \ ;\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

1 بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية. — 1,00 ن

2 نعتبر التطبيق : $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^* & \longmapsto & E\\ z & \longmapsto & M(z)\end{array}$

2 أ بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$. — 1,00 ن

2 ب استنتج أن $(E-\{M(0)\},\times)$ زمرة تبادلية. — 0,50 ن

3 بين أن $(E,*,\times)$ جسم تبادلي. — 1,00 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

1 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : \; z^2 - (1+\sqrt{3})(1+i)z + 4i = 0$

0,50 ن | 1 أ | تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = \left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$.

1,00 ن | 1 ب | أكتب على الشكل المثلثي حلي المعادلة (E) .

2 المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر A و B ذواتا اللحقين $a = 1 + i\sqrt{3}$ و $b = \sqrt{3} + i$ على التوالي.

0,75 ن | 2 أ | بين أن $(\mathcal{D})$ مجموعة النقط من المستوى العقدي التي لحقها $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ هي مستقيم يمر من النقطة B .

0,50 ن | 2 ب | لتكن M و M' نقطتان لحقاهما على التوالي z و z' بحيث $z' = a\bar{z} - b$ و $z \neq b$. بين أن : $\frac{2}{|z-b|^2} = \frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}$

0,75 ن | 2 ج | استنتج أن المستقيم (D) هو منصف الزاوية $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

التمرين الرابع : (6,5 ن)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(x) = \ln x - \frac{n}{x}$$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,75 ن | 1 أ | أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

0,75 ن | 1 ب | أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $]0,+\infty[$ ثم اعط جدول تغيراتها.

0,50 ن | 1 ج | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_2)$.

0,50 ن | 2 | بين أن الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

0,50 ن | 3 أ | بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,+\infty[$ حيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,50 ن | 3 ب | قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن | 3 ج | بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا.

0,50 ن | 4 أ | بين أن : $(\forall x > 0) \; ; \; \ln x < x$

0,50 ن | 4 ب | بين أن : $\lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$

5 لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n ، نضع : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx$

0,50 ن | 5 أ | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) , (\exists\, c_n \,\epsilon\, [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}]) \; : \; I_n = f_n(c_n)$

0,50 ن | 5 ب | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \; ; \; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

0,50 ن | 5 ج | حدد النهاية : $\lim_{n\infty}(I_n)$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة العددية g_n ذات المجهول x المعرفة على المجال $[n,+\infty[$ بما يلي :

$$g_n(x) = \int_n^x \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$$

0,50 ن | 1 | أ | بين أن g_n قابلة للاشتقاق على $[n,+\infty[$. ثم حدد دالتها المشتقة الأولى g_n' .

0,25 ن | 1 | ب | بين أن الدالة g_n تزايدية قطعا على المجال $[n,+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall x \geq n) \ ; \ g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(يمكنك استعمال المتفاوتة التالية : $(\forall t \geq 0) \ ; \ \ln(1+t) \leq t$).

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 ن | 3 | أ | بين أن g_n تقابل من $[n,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$.

0,50 ن | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall n \geq 2) , (\exists! \ u_n \geq n) \ : \ \int_n^{u_n} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt = 1$

4 | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة في السؤال 3) ب) .

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt \ ; \ (\forall n \geq 2)$

0,50 ن | 4 | ب | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا.

0,25 ن | 4 | ج | حدد النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع : $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$: $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$.

نعتبر المجموعة : $E=\{\,M(a,b)\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

0,50 ن | 1 | بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

| 2 | نعرف على $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $\top$ بما يلي :

$$\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ ;\ \ M(a,b)\ \top\ M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

0,50 ن | 2 | تحقق أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top)$.

| 3 | ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، بالمصفوفة $M(a,b)$ من E^*.

0,75 ن | 3 | أ | تحقق أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\top)$. و أن : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$. حيث $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$.

0,75 ن | 3 | ب | استنتج أن $(E^*,\top)$ زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J .

0,50 ن | 4 | أ | بين أن قانون التركيب الداخلي $\top$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E .

0,50 ن | 4 | ب | استنتج أن $(E,+,\top)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

| I | ليكن m عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة E التالية : $(E):\ \ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,50 ن | I | 1 | تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=(2im)^2$.

0,50 ن | I | 2 | حُل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

| II | المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نفترض أن $m\in\mathbb{C}\setminus\{0;1;i\}$

و نضع : $z_1=\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1)$ و $z_2=\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i)$.

نعتبر النقط $A(1)$ و $B(i)$ و $M(m)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$.

0,25 ن | II | 1 | أ | تحقق أن : $z_1=iz_2+1$.

0,50 ن | II | 1 | ب | بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران r ذو المركز $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

0,50 ن | II | 2 | أ | تحقق أن : $\left(\frac{z_2-m}{z_1-m}\right)=i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$

0,50 ن | II | 2 | ب | بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$.

0,75 ن | II | 2 | ج | حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .

1 ليكن الزوج (x,y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث : $px + y^{p-1} = 2017$.

0,25 ن | **1** أ تحقق من أن : $p < 2017$.

0,50 ن | **1** ب بين أن العدد p لا يقسم العدد y .

0,75 ن | **1** ج بين أن : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. ثم استنتج أن العدد p يقسم العدد 2016 .

0,50 ن | **1** د بين أن : $p = 7$.

1,00 ن | **2** حدد حسب قيم p ، الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^{2*}$ التي تحقق $px + y^{p-1} = 2017$.

التمرين الرابع : (10,0 ن)

I الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad (\forall x > 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

0,25 ن | **I** **1** أ بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر.

0,50 ن | **I** **1** ب بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

0,50 ن | **I** **1** ج بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$; $(\forall x > 0)$.

0,50 ن | **I** **2** أ أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوِّل مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0,25 ن | **I** **2** ب اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن | **I** **3** أ بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها.

0,50 ن | **I** **3** ب أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$. نأخذ $f(1) \approx 0{,}7$ و $4e^{-3} \approx 0{,}2$.

II الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$$

0,25 ن | **II** **1** بين أن الدالة F متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن | **II** **2** أ باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall x > 0) \; ; \quad \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt = e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\,e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

0,25 ن | **II** **2** ب حدد : $\displaystyle\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{-1}{t}}\,dt$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن | **II** **2** ج بين أن : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{e}$

0,50 ن | **II** **3** أحسب بالوحدة (cm^2) مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 0$.

	II	4		نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n = F(n) - F(n+2)$
0,50 ن	II	4	أ	باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n\,,n+2[$ حيث: $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.
0,25 ن	II	4	ب	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} < u_n < 2\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$
0,25 ن	II	4	ج	استنتج قيمة النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$
	III			الجزء الثالث :
0,50 ن	III	1	أ	بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيدا α_n بحيث : $f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$.
0,25 ن	III	1	ب	بين أن المتتالية العددية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية.
0,25 ن	III	1	ج	تحقق أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ \dfrac{-1}{\alpha_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right) = \dfrac{-1}{n}$
0,25 ن	III	2	أ	بين أن : $(\ \forall\ t\ \epsilon\ [0,+\infty[\ )\ ;\ 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$
0,50 ن	III	2	ب	بين أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \dfrac{-x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq \dfrac{-x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$
	III	3		ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .
0,50 ن	III	3	أ	تحقق أن $\alpha_4 \geq 1$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geq 1$. نقبل أن : $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$.
0,50 ن	III	3	ب	بين أن : $1 - \dfrac{2}{3\alpha_n} \leq \dfrac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$ يمكنك استعمال 1)ج) و 2)ب) من الجزء III.
0,50 ن	III	3	ج	بين أن : $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq \alpha_n$.يمكنك استعمال 3)أ) و 3)ب). و استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)$
0,50 ن	III	3	د	حدد النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}\left(\alpha_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر المجال $G = [0,1[$.

ليكن $*$ التطبيق من $G \times G$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $a * b = a + b - E(a+b)$.

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

0,75 ن | 1 | بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

0,75 ن | 2 | بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة G .

0,50 ن | 3 | بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا في المجال G وجب تحديده.

0,50 ن | 4 | بين أن كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' بالنسبة للقانون $*$. (ينبغي تحديده).

1,00 ن | 5 | ليكن $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. حُل في G المعادلة التالية : $(F) : \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois le } x} = \frac{1}{n}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

يتكون هذا التمرين من جزئين مستقلين.

| I | الجزء الأول : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E_\theta) : \; z^2 - 2iz - \left(1 + e^{2i\theta}\right) = 0$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

0,50 ن | I | 1 | ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. بين القاعدتين التاليتين :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad \text{و} \quad e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

0,50 ن | I | 2 | حُل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ) ثم اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

| I | 3 | لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

0,50 ن | I | 3 | أ | بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية.

0,50 ن | I | 3 | ب | ما قيمة θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O ؟

| II | الجزء الثاني : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $(b+i)$.

حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

0,50 ن | II | 1 | اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم احسب $aff(B')$ بدلالة a و b .

0,50 ن | II | 2 | بين التكافؤ التالي : $B' \in (Oy) \iff a + b = \sqrt{3}$.

ثم عبِّر في هذه الحالة عن $aff(B')$ بدلالة a .

| II | 3 | نفترض فيما يلي أن $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$ و لتكن C و D النقطتين

ذَوَاتا اللحقين $c = -i$ و $d = 2 + \sqrt{3}(1-2i)$ على التوالي .

0,50 ن | II | 3 | أ | ما هي طبيعة كل من المثلثين ABC و ACD ؟

0,50 ن | II | 3 | ب | نضع $E = r(D)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

حدد لحقي النقطتين E و F ثم بين أن المثلث BEF متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث : (2,5 ن)

1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $(E):\quad ax \equiv 1[p]$

حيث a عنصر من المجموعة : $A_p = \{1,2,\cdots,(p-1)\}$.

و p عدد أولي أكبر من أو يساوي 3 .

0,50 ن — **1 أ** بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

0,50 ن — **1 ب** ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{p-2} على العدد p.

بين أن $r \in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

0,50 ن — **2 أ** فيما يلي نعتبر أن $p = 31$. حدد قيمتي r حيث $a = 2$ ثم $a = 3$.

0,50 ن — **2 ب** حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين التاليتين : $(F_2) : 3x \equiv 1[31]$ و $(F_1) : 2x \equiv 1[31]$.

0,50 ن — **2 ج** إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(F) : 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$ في $\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع : (10,0 ن)

I الجزء الأول : لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = e^x - (x+1)$.

0,50 ن — **I 1** بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$

0,50 ن — **I 2** حدد منحى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0,+\infty[$ و $]-\infty,0]$.

0,50 ن — **I 3** بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \dfrac{1}{2} \le \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x}$

يمكنك أن تبين أولاً أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ 0 \le \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \le x\,h(x)$

0,50 ن — **I 4** بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_-^*)\ ;\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x} \le \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \dfrac{1}{2}$

يمكنك أن تبين أولاً أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_-^*)\ ;\ x\,h(x) \le \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \le 0$

0,50 ن — **I 5** أحسب النهاية : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right)$ ثم استنتج النهاية : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right)$

II الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ :\ \ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad et \quad f(0) = 1$$

0,25 ن — **II 1** بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

0,50 ن — **II 2** أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

0,50 ن — **II 3** بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر.

0,50 ن — **II 4** بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$ حيث : $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$.

0,50 ن — **II 5** أدرس تغيرات الدالة φ على $\mathbb{R}$ و استنتج إشارتها على $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن — **II 6** ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — **II 7** أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول 0

III — الجزء الثالث : لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \ : \ u_{n+1} = f(u_n) \quad et \quad u_0 = 1$$

0,50 ن — III 1 — بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده

0,50 ن — III 2 أ — بين أن : $(\forall\, x \in\,]0,+\infty[\,)\ ;\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\, e^{x} - 1}{2(e^{x} - 1)^2}$

0,50 ن — III 2 ب — بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\ e^{2x} - 2xe^{x} - 1 \geq 0$ ثم استنتج أن : $\frac{-1}{2} \leq f'(x) < 0$

0,50 ن — III 3 أ — بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0,50 ن — III 3 ب — استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-\alpha)$.

و حدد النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

IV — الجزء الرابع : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

0,50 ن — IV 1 — بين أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq xf(x)$. ثم استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 ن — IV 2 — بين أن : $(\forall x \leq 0)\ ;\ F(x) \leq xf(x)$. ثم استنتج النهايتين :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} \qquad et \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

0,50 ن — IV 3 — بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن :

$$\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x(3 - e^{x})}{e^{2x} - 1} & ; \quad \forall x\in\mathbb{R}^* \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن — IV 4 — ضع جدول تغيرات الدالة F ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_F)$ في م م م $(,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

نعطي : $\ln 3 \approx 1{,}1$ و $F(\ln 3) \approx 0{,}44$.

التمرين الأول : (5,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطة A ذات اللحق $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. نربط كل نقطة M ذات اللحق $z = x + iy$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ بالنقطة M' ذات اللحق $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + iy$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) \ ; \ \sqrt{3} \cdot MA = 2 \cdot MM' \}$

1 (0,50 ن) بين أن : $E = \{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ et \ x^2 - 3y^2 = 1 \}$.

2 نضع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ و $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

أ (0,50 ن) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f و تحقق أن f دالة زوجية.

ب (0,50 ن) أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1 .

ج (0,50 ن) حدد مقارب المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

د (0,75 ن) بين أن : $E = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}_{-f})$. ثم أنشئ المجموعة E .

3 لكل نقطتين $M(a+ib)$ و $M(c+id)$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية .

نضع : $M(a+ib) \top M(c+id) = M\big(ac + 3bd + i(ad+bc)\big)$

أ (1,00 ن) بين أن القانون $\top$ تجميعي .

ب (0,75 ن) بين أن $(E,\top)$ جزء مستقر من $(\mathcal{P},\top)$.

ج (1,00 ن) بين أن $(E,\top)$ زمرة. هل هي تبادلية ؟ علل جوابك .

التمرين الثاني : (4,5 ن)

1 نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) : 109x - 226y = 1$

أ (0,50 ن) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 .
و استنتج أن (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.

ب (0,50 ن) بين أن مجموعة حلول (E) هي مجموعة الأزواج $(141 + 226k \,; 68 + 109k)$ حيث k عدد صحيح نسبي .

ج (0,75 ن) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد d أصغر من أو يساوي 226 و عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد e حيث $109d = 1 + 226e$.
(يجب تحديد قيمتي d و e)

2 (0,50 ن) بين أن العدد 227 أولي .

3 نضع : $A = \{0; 1; 2; \cdots; 226\}$. و نعتبر التطبيقين f و g المعرفين من A نحو A بما يلي : $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{109} على العدد 227 .
$g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{141} على العدد 227 .

أ (0,50 ن) تحقق أن : $g(f(0)) = 0$.

ب (0,50 ن) بين أن : $\forall\, a \in A \setminus \{0\} \ ; \ a^{226} \equiv 1[227]$.

ج (0,75 ن) بين أن : $\forall\, a \in A \ ; \ g(f(a)) = f(g(a)) = a$.

د (0,50 ن) ماذا يمكن أن نستنتج بخصوص الدالتين f و g .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نضع : $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\ ;\ I_p = \int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx$

0,50 ن | 1 أ | أحسب التكامل I_1 .

0,50 ن | 1 ب | بين أن : $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\ ;\ I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$

0,50 ن | 1 ج | استنتج قيمتي التكاملين I_2 و I_3 .

0,50 ن | 2 أ | بين أن المتتالية $(I_p)_{p\geq 0}$ تناقصية.

0,50 ن | 2 ب | بين أن المتتالية $(I_p)_{p\geq 0}$ متقاربة.

0,50 ن | 2 ج | بين أن : $\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$

التمرين الرابع : (7,0 ن)

I | لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0,50 ن | I 1 | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to(-1)^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 ن | I 2 | اعط جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | I 3 | بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $]0,+\infty[$ حيث : $g(\alpha) = 0$ و $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

0,50 ن | I 4 | حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

II | الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل لـ f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1,00 ن | II 1 | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to(-1)^+} fx)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

II 2 | لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$.

0,50 ن | II 2 أ | بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن | II 2 ب | بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

1,00 ن | II 3 | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ $\alpha \approx 0,7$ و $f(\alpha) \approx 0,4$).

III | الجزء الثالث : نعتبر التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

1,00 ن | III 1 | أحسب التكامل I. (يمكنك وضع : $t = \frac{\pi}{4} - x$).

1,00 ن | III 2 | أحسب بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

(يمكنك وضع : $t = Arctan\,x$) .

2015 N

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

On calcule directement le déterminant de cette équation à l'aide de la formule connue :

$$\begin{aligned}\Delta &= (5+i\sqrt{3})^2 - 4(4+4i\sqrt{3}) \\ &= 25+10i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2-16-16i\sqrt{3} \\ &= 25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3} \\ &= 6-6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant : $\Delta = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (1)$

De l'autre coté, On développe $(3-i\sqrt{3})^2$ on trouve :

$$(3-i\sqrt{3})^2 = 9-6i\sqrt{3}-3 = 6-6i\sqrt{3}$$

D'où le résultat suivant :

$$(3-i\sqrt{3})^2 = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\Delta = (3-i\sqrt{3})^2$

Remarque : la question posée est une question de vérification. C-à-d que le résultat est connue a priori. Et on vous demande de le redémontrer et de le redécouvrir. Mais si on reformule la question ainsi : écrire sous forme d'un carré, alors là je vous propose le procédé suivant :

Premièrement : On doit écrire $(6-6i\sqrt{3})$ sous sa forme exponentielle $re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = 12$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad 6-6i\sqrt{3} &= 12\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 12\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\ &= 12e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{aligned}$$

Il est facile maintenant de trouver les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Rappel : les racines $n^{ème}$ du nombre complexe $re^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$.
k et n sont deux entiers naturels qui vérifient $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$.

D'après ce petit rappel, on déduit que les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$ sont :

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[2]{12}\, e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times 0\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{-i\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) \\ &= 3-i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[2]{12}\, e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times 1\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{5i\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ &= -3+i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalement on écrit : $\Delta = (3-i\sqrt{3})^2 = (-3+i\sqrt{3})^2$

La Question : 1) b)

$$a = \frac{(5+i\sqrt{3})-(3-i\sqrt{3})}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

$$b = \frac{(5+i\sqrt{3})+(3-i\sqrt{3})}{2} = 4 \in \mathbb{R}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}(1-i\sqrt{3})a &= (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) \\ &= 1^2-(i\sqrt{3})^2 \\ &= 1-(-3) = 4 = b\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soit R la rotation mentionnée dans cette question

$$\begin{aligned}R(O) = B_1 \quad&\Leftrightarrow\quad (z_{B_1}-z_A) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_O-z_A) \\ &\Leftrightarrow\quad (b_1-a) = i(0-a) \\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = a(1-i) \\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = (1+\sqrt{3})(1-i) \\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = (1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Notons par H la transformation du plan (P) qui associe B à B_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_B-z_A}{z_{B_1}-z_A}\right) &= \frac{4-1-i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i-1-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B_1} - z_A}\right) = \sqrt{3} \implies (z_B - z_A) = \sqrt{3}(z_{B_1} - z_A)$$
$$\implies \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{AB_1}$$

Donc B est l'image de B_1 par l'homothétie H de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

La Question : 2) c)

$$\frac{b}{b-a} = \frac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a - a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{b-a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$\implies \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

La Question : 2) d)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OAB et soit C un point du cercle $(\mathcal{C})$ différent de O et de B .

$$\begin{aligned}
C \in (\mathcal{C}) &\implies O, A, B \text{ et } C \text{ sont circulaires} \\
&\implies \arg\left(\frac{z_O - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_A - z_B}\right)[\pi] \\
&\implies \arg\left(\frac{0-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{0-b}{a-b}\right)[\pi] \\
&\implies \arg\left(\frac{-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{-b}{a-b}\right)[\pi] \\
&\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) + \pi \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right) + \pi[\pi] \\
&\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right)[\pi] \\
&\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]
\end{aligned}$$

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

Rappel : (Théorème de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \iff \exists\, u, v \in \mathbb{Z} \;;\; au + bv = 1$$

On a : $1436(1051) + 2015(-749) = 1$

Alors : $2015 \wedge 1436 = 1$

La Question : 2) a)

Soit x un entier relatif vérifiant $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

$$\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \;;\; x^{1439} - 1436 = 2015k$$
$$\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \;;\; x^{1439} - 2015k = 1436$$

Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015

$$\begin{aligned}
&\implies d/x \quad et \quad d/2015 \\
&\implies d/x^{1439} \quad et \quad d/2015k \\
&\implies d/(x^{1439} - 2015k) \\
&\implies d/1436
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Soit $\delta = 2015 \wedge x$

$$\begin{aligned}
&\implies \delta/2015 \quad et \quad \delta/x \\
&\implies \delta/2015 \quad et \quad \delta/1436 \;;\; selon 2)a) \\
&\implies \begin{cases} \delta/(2015 \times 749) \\ \delta/(1436 \times 1051) \end{cases} \\
&\implies \delta/(1436 \times 1051 - 2015 \times 749) \\
&\implies \delta/1 \\
&\implies \begin{cases} oubien \;\; \delta = 1 \\ oubien \;\; \delta = -1 \end{cases} \\
&\implies \delta = 1 \;;\; car\; 1 > -1 \\
&\implies 2015 \wedge x = 1
\end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Rappel : (Théorème de Fermat)

La Forme générale :

$$p \in \mathbb{P} \implies (\forall a \in \mathbb{Z}) \;:\; a^p \equiv a[p]$$

La Forme réduite :

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \implies a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Pour commencer, il est très facile de montrer que 5, 13 et 31 sont tous des nombres premiers. Et cela à l'aide du critère connue par tout le monde (test de primalité). Aussi, une simple calculette nous assure les égalités suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} 1440 = 360 \times 4 \\ 1440 = 120 \times 12 \\ 1440 = 30 \times 48 \end{array} \right.$$

Rappel : $x \wedge abc = 1 \iff \left| \begin{array}{l} x \wedge a = 1 \\ x \wedge b = 1 \\ x \wedge c = 1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
x \wedge 2015 = 1 &\iff x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1 \\
&\iff \left| \begin{array}{l} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Et voilà ! on dispose maintenant des armes nécessaires pour appliquer le Théorème de Fermat sous sa forme réduite :

$$\begin{cases} 5 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{5-1} \equiv 1[5] \Rightarrow x^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (x^4)^{360} \equiv 1^{360}[5] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[5]$$

$$\begin{cases} 13 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{13-1} \equiv 1[13] \Rightarrow x^{12} \equiv 1[13] \Rightarrow (x^{12})^{120} \equiv 1^{120}[13] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[13]$$

$$\begin{cases} 31 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{31-1} \equiv 1[31] \Rightarrow x^{30} \equiv 1[31] \Rightarrow (x^{30})^{48} \equiv 1^{48}[31] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[31]$$

La Question : 3) b)

Rappel : $\begin{cases} a/n \\ b/n \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/n$

$$\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5/(x^{1440}-1) \\ 13/(x^{1440}-1) \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow (5 \times 13)/(x^{1440}-1) \Rightarrow 65/(x^{1440}-1) \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[65]$$

$$\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[65] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 65/(x^{1440}-1) \\ 31/(x^{1440}-1) \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow (65 \times 31)/(x^{1440}-1) \Rightarrow 2015/(x^{1440}-1) \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[2015]$$

La Question : 4)

$$\begin{cases} x^{1439} \equiv 1436[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x^{1439} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1440} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1436x \equiv 1[2015] & (1) \\ 1436 \times 1051 \equiv 1[2015] & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 1436(x-1051) \equiv 0[2015] \Rightarrow 2015/1436(x-1051) \Rightarrow 2015/(x-1051) \ ; \ Gauss \Rightarrow x \equiv 1051[2015]$$

Remarque : On peut montrer que $2015 \wedge 1436 = 1$ à l'aide du procédé de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2015 et de1436

On a : $\begin{cases} 2015 = 5 \times 13 \times 31 \\ 1436 = 2^2 \times 359 \end{cases}$

D'où : $(5 \times 13 \times 31) \wedge (2^2 \times 359) = 1$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

L'application φ est définie comme suit :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R},+) & \longmapsto & (E,\top) \\ x & \longmapsto & M(x-1) \end{array}$$

Le but de cette question est de montrer la chose suivante : $\varphi(x+y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$

Pour commencer, soient x et y deux nombres réels .

$$\begin{aligned} \varphi(x) \top \varphi(y) &= M(x-1) \top M(y-1) \\ &= M(x-1+y-1+1) \\ &= M(x+y-1) \\ &= \varphi(x+y) \end{aligned}$$

D'où φ est un homomorphisme de groupes.

La Question : 1) b)

Premièrement, On veut-bien montrer que φ est une bijection. Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(x) = M(x-1)$ dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle admet une seule solution réelle .

Etant donné M une matrice de E, alors par définition de l'ensemble E on peut écrire M sous la forme $M = M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ avec x est un nombre réel. Donc $\varphi(x+1) = M(x)$

c-à-d : $(\forall M \in E)(\exists! x \in \mathbb{R}) \ : \ \varphi(x+1) = M(x)$

Et d'après la définition d'une application bijective on conclut que φ est bien une bijection

Ainsi, l'image du groupe $(\mathbb{R},+)$ par φ est le groupe $(E,\top)$ (car $\varphi(\mathbb{R}) = E$)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G,*)$ vers un ensemble $(F,\top)$. alors l'image du groupe $(G,*)$ par f est le groupe $(f(G),\top)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(E,\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(\mathbb{R},+)$ par le biais de l'application φ . Autrement-dit, il suffit d'exploiter l'égalité $\varphi(\mathbb{R},+) = (E,\top)$.

Comme $(\mathbb{R},+)$ est commutatif alors $(E,\top)$ l'est aussi.

Comme 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R},+)$ alors $\varphi(0)$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$ avec $\varphi(0) = M(0-1) = M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Donc la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$.

Le symétrique d'un élément $\varphi(x)$ dans $(E,\top)$ est l'élément $\varphi(-x)$ dans $(E,\top)$ (car $-x$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi(-x) = M(-x-1)$

La Question : 2) a)

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & x+y+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2x+2y+2xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & (x+y+xy) \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y)+xy \end{pmatrix}$$

$$= M(x+y+xy)$$

La Question : 2) b)

E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées, d'ordre 2 à coefficients réels, qui s'écrivent sous la forme $M(x)$ définie dans l'énoncé. Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de E, Alors On a d'après la question précédente : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$ comme x et y sont deux nombres réels alors $(x+y+xy)$ est aussi un nombre réel d'où : $\forall\, M(x), M(y) \,\epsilon\, E \;:\; M(x) \times M(y) \,\epsilon\, E$
Donc E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par la multiplication matricielle $\times$ dans E.
$\times$ est commutative dans E car :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= M(x+y+xy) \\ &= M(y+x+yx) \\ &= M(y) \times M(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Soients $M(x)$, $M(y)$ et $M(z)$ trois éléments de E.

$$\begin{aligned} M(x) \times \big(M(y) \times M(z)\big) &= M(x) \times M(y+z+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big(M(x) \times M(y)\big) \top \big(M(x) \times M(z)\big) & \\ &= M(x+y+xy) \top M(x+z+xz) \\ &= M(x+y+xy+x+z+xz+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (**) \end{aligned}$$

D'après les résultats $(*)$ et $(**)$ on tire :

$$\begin{aligned} M(x) \times \big(M(y) \times M(z)\big) & \\ &= \big(M(x) \times M(y)\big) \top \big(M(x) \times M(z)\big) \end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive à gauche par rapport à $\top$. on vérifie aisément la distributivité à droite de $\times$ par rapport à $\top$ pour conclure finalement que $\times$ est distributive par rapport à $\top$.

Soit $M(x)$ un élément de .

$$M(x) \top M(-1) = M(x-1+1) = M(x)$$
$$M(-1) \top M(x) = M(-1+x+1) = M(x)$$

Donc $M(-1)$ est l'élément neutre du groupe $(E,\top)$ pour la matrice unité I.
on a tout d'abord $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 \\ -2\times 0 & 1+2\times 0 \end{pmatrix}$
soit $M(x)$ un élément de E on a :

$$\left| \begin{array}{l} M(x) \times M(0) = M(x+0+x0) = M(x) \\ M(0) \times M(x) = M(0+x+0x) = M(x) \end{array} \right.$$

Donc $M(0) = I$ est l'élément neutre de la multiplication matricielle $\times$ dans E .

La Question : 3) a)

Soit x un nombre réel différent de -1,

$$\begin{aligned} M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) &= M\left(x + \frac{-x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x}\right) \\ &= M\left(\frac{x^2+x-x-x^2}{1+x}\right) \\ &= M(0) = I \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : soit E un ensemble muni de deux lois de compositions internes $*$ et $\top$.

$(E,*,\top)$ est un corps Si et seulement si :

- $(E,*)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $(E\backslash\{e\},\top)$ est un groupe
- $\top$ est distributive par rapport à $*$

Avec e est l'élément neutre du groupe $(E,*)$.

Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E\backslash\{M(-1)\}$
On a : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$
Comme $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y(x+1) \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$
Donc $x + y(x+1) \neq -1$
c-à-d : $(x+y+xy) \neq -1$
D'où : $M(x+y+xy) \,\epsilon\, E\backslash\{M(-1)\}$

Donc $\times$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $E\backslash\{M(-1)\}$.

Comme $\times$ est associative dans E alors elle l'est aussi dans $E\backslash\{M(-1)\}$. comme $I = M(0)$ est l'élément neutre pour $(E,\times)$ et $M(0) \,\epsilon\, E\backslash\{M(-1)\}$ alors I est aussi l'élément neutre pour $\times$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Comme $\forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$ alors tout élément $M(x)$ de $E\backslash\{M(-1)\}$ admet un symétrique $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Finalement : On a trouvé que $\times$ est une loi de composition interne dans $E\setminus\{M(-1)\}$, associative, admet un élément neutre et qui vérifie la symétrie des éléments de $E\setminus\{M(-1)\}$
alors $(E\setminus\{M(-1)\}\,;\times)$ est un groupe (1) .

Mais d'après les questions précédentes on a vu que $(E,\top)$ est un groupe (2) . et aussi que $\times$ est distributive par rapport à $\top$ (3). Donc on tire des résultats (1) , (2) et (3) , à l'aide du rappel que $(E,\top,\times)$ est bien un corps qui est commutatif car la loi $\times$ est commutative dans E.

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\left(1+\underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+(\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe (OY)

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x(1+(\ln x)^2)\\ &= \lim_{x\to 0^+} x + x(\ln x)^2\\ &= 0 + \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2\\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2\\ &= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=\sqrt{x}}} 4t^2\ln t\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(\underbrace{4t}_{0}\right)\left(\underbrace{t\ln t}_{0}\right) = 0 = f(0)\end{aligned}$$

Alors la fonction f est bien continue à droite en 0 .

La Question : I) 2) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1+\left(\underbrace{\ln x}_{-\infty}\right)^2 = +\infty$$

l'axe (OY) est tangente à $(\mathcal{C})$ au voisinage de 0 .

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1\\ &= (\ln x + 1)^2 > 0 \;;\; \forall x > 0\end{aligned}$$

Alors la fonction f est purement croissante.

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = (\ln x + 1)^2$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant un carré d'une autre fonction aussi dérivable. La dérivée seconde f'' est définie par :

$$f''(x) = 2(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2(\ln x+1)}{x}$$

Si $x = \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) = 0$

Si $x > \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) > 0$

Si $x < \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) < 0$

Alors $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion à $(\mathcal{C})$.

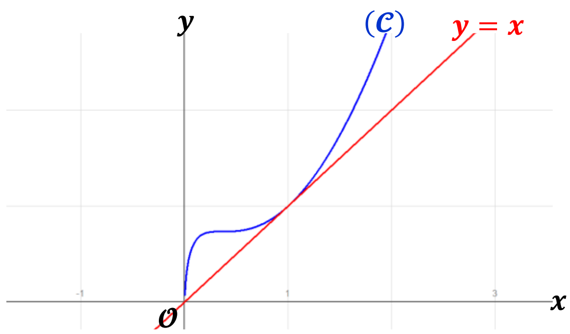
La Question : I) 3) b)

$$f(x) - x = x(1+(\ln x)^2) - x = x(\ln x)^2$$

$$\begin{aligned} Alors \;:\; signe(f(x)-x) &\equiv signe(x(\ln x)^2)\\ &\equiv signe(x) \;;\; car\;\; (\ln x)^2 > 0\\ &\equiv (+)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \;\; \forall x \geq 0 \;;\; f(x) - x \geq 0$$
$$\Longrightarrow \;\; \forall x \epsilon [0,+\infty[\;;\; f(x) \geq x$$

La Question : I) 3) c)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Soit (P_n) la proposition définie comme suit : (P_n) : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$. Examinons la véracité de (P_n) pour chaque n de $\mathbb{N}$ à l'aide du procédé de récurrence. L'instance (P_0) est validé car tout simplement $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$.
Soit n dans $\mathbb{N}$ et on suppose que (P_n) soit vraie.

$$\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie\ &\Longrightarrow e^{-1} \leq u_n < 1 \\
&\Longrightarrow f(e^{-1}) \leq f(u_n) < f(1) \\
&\Longrightarrow \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1\ ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\
&\Longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{e} < f(u_n) < 1 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Longrightarrow (P_{n+1})\ \ est\ vraie
\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} l'instance (P_0)\ est\ vraie \\ l'instance (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$

Donc (P_n) est toujours vraie
C-à-d : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{e} \leq u_n < 1$

La Question : II) 2)

$$\begin{aligned}
&(\forall x > 0)\ :\ f(x) \geq x \\
&(pour\ x = u_n)\ :\ f(u_n) \geq u_n \\
&car\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n \geq \frac{1}{e} > 0 \\
&Donc\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \geq u_n
\end{aligned}$$

Et par définition de la croissance des suites on conclut que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
Or, $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_n < 1$ (majorée par 1)
Donc $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle l .

La Question : II) 3) a)

$$\begin{aligned}
(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ &\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{e} \leq l \leq 1 \quad ;\ passage\ aux\ limites
\end{aligned}$$

La Question : II) 3) b)

$$(u_n) : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

f est une fonction continue et croissante,
soit $l = \lim_{n\infty}(u_n)$ Donc l vérifie $\quad l = f(l)$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ l(1 + (\ln l)^2) = l \\
&\Leftrightarrow\ 1 + (\ln l)^2 = 1\ ;\ l \neq 0 \\
&\Leftrightarrow\ (\ln l)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \ln l = 0 \\
&\Leftrightarrow\ l = 1
\end{aligned}$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Une condition suffisante pour qu'une fonction f admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue. Il est évident que la fonction h est bien continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ comme étant somme de deux fonctions trivialement continues sur $]0,+\infty[$. il reste à démontrer que :
$\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ ;\ H'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x > 0\ ;\ H'(x) &= \tfrac{-2}{4}x + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{x} + 2x\ln x\right) \\
&= \frac{-x}{2} + \frac{x}{2} + x\ln x \\
&= x\ln x \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

La Question : III) 1) b)

Je propose une démarche à base d'une intégration par parties.
Rappel : l'intégration par parties est la méthode à travers laquelle on transforme l'intégrale d'un produit de fonction en d'autres intégrales dans le but de simplifier le calcul :

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^x \underbrace{t}_{u'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{v(t)}\,dt &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\cdot(\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\cdot 2\ln t \cdot \frac{1}{t}\right)dt \\
&= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x t\ln t\,dt
\end{aligned}$$

La Question : III) 1) c)

Evaluons d'abord l'intégrale suivante : $\int_1^x tlnt\,dt$

$$\begin{aligned}
\int_1^x (t\ln t)dt = \int_1^x H'(t)\,dt\ &= [H(t)]_1^x \\
&= H(x) - H(1) \\
&= \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x f(t)\,dt \\
&= \int_1^x t(1+(\ln t)^2)\,dt \\
&= \int_1^x t\,dt + \int_1^x \underbrace{t}_{v'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{u(t)}\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x + \left[\frac{t^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \cdot 2\ln t \cdot \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x (t\ln t)\,dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}
\end{aligned}
$$

La Question : III) 2) a)

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}$$

F est continue sur $[0,+\infty[$ comme étant somme de quatre fonctions toutes continues sur $[0,+\infty[$.

La Question : III) 2) b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} F(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0\right) = \frac{-3}{4}
\end{aligned}
$$

La continuité à droite en 0 nous donne :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) \quad &\Rightarrow \quad \frac{-3}{4} = \int_1^0 f(t)\,dt \\
&\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$ $\Rightarrow \quad x \le t \le 2x$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -2x \le -t \le -x \\
&\Rightarrow \quad e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \ ; \ Exp\ est \nearrow
\end{aligned}
$$

La Question : 1) b)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

$$e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \ \Rightarrow \ \frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t} \ ; \ t > 0$$

$$\Rightarrow \ \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-2x}}{t}\right) dt \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-x}}{t}\right) dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale parce que les trois fonctions sont toutes continues sur $[x, 2x]$ et aussi $x < 2x$ gardera l'ordre inchangeable.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad e^{-2x}[\ln|t|]_x^{2x} \le g(x) \le e^{-x}[\ln|t|]_x^{2x} \\
&\Rightarrow \quad e^{-2x}(\ln 2) \le g(x) \le e^{-x}(\ln 2)
\end{aligned}
$$

La Question : 1) c)

$$\underbrace{e^{-2x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln 2} \le g(x) \le \underbrace{e^{-x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln 2}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \ln 2 = g(0) \\
&\Rightarrow \quad g\ est\ bien\ conitnue\ à\ droite\ en\ 0
\end{aligned}
$$

La Question : 2)

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $a \in]0,+\infty[$ Donc $\psi : x \mapsto \int_a^x \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt$ est la seule fonction primitive de φ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a
C-à-d : $\begin{cases} \forall x > 0 \ ; \ \psi'(x) = \varphi(x) \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt = \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt \\
&= \int_x^a \varphi(t)\,dt + \int_a^x \varphi(t)\,dt \\
&= -\int_a^x \varphi(t)\,dt + \int_a^{2x} \varphi(t)\,dt \\
&= -\psi(x) + \psi(2x)
\end{aligned}
$$

g est dérivable car elle s'écrit sous la forme d'une somme de deux compositions continues de fonctions continues.

$$
\begin{aligned}
g'(x) = -\psi'(x) + 2\psi'(2x) &= -\varphi(x) + 2\varphi(2x) \\
&= \frac{-e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-2x}}{2x} \\
&= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}
\end{aligned}
$$

La Question : 3) a)

Soit $t > 0$. la fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'usage du **TAF** est donc valable sur n'importe quelle intervalle dans $\mathbb{R}$.
En particulier sur $[0, t]$

$$\begin{cases} h\ est\ continue\ sur\ [0, t] \\ h\ est\ dérivable\ sur\ ]0, t[\end{cases}$$

$$Donc\ :\ \exists\, c \in\,]0,t[\ ;\ \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = h'(c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < c < t \\ \left(\dfrac{e^{-t}-1}{t}\right) = -e^{-c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 < c < t \ &\Rightarrow\ -t < -c < 0 \\ &\Rightarrow\ e^{-t} < e^{-c} < 1\ ;\ Expo\ est\ \nearrow \\ &\Rightarrow\ -1 < -e^{-c} < -e^{-t} \\ &\Rightarrow\ -1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t>0 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soit x et t deux nombres réels strictement positifs.

$$-1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t>0$$

$$\Rightarrow\ \int_x^{2x}(-1)\,dt < \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}-1}{t}\right)dt < \int_x^{2x}(-e^{-t})\,dt$$

On a introduit l'intégrale sur cet encadrement car la continuité est vérifié et $x < 2x$

$$\Rightarrow\ -[t]_x^{2x} \le \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt - \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)dt \le [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow\ -x \le g(x) - \ln 2 \le e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow\ -1 \le \frac{g(x)-\ln 2}{x} \le \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\ ;\ x>0$$

La Question : 3) c)

Calculons tout d'abord cette gentille limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}(e^{-x})\left(\frac{e^{-x}-e^{0}}{x-0}\right) \\ &= (e^{-0})\left((e^{-x})'_{/x=0}\right) \\ &= (e^{-0})(-e^{-0}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$D'où :\ \underbrace{-1}_{\xrightarrow{x\to 0^+}\ -1} \le \frac{g(x)-\ln 2}{x} \le \underbrace{\left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0^+}\ -1}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = -1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ g\ est\ dérivable\ à\ droite\ en\ 0$$

2015 R

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x*y &= x+y-e^{xy}+1 \\ &= y+x-e^{xy}+1 \\ &= y*x \end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

La Question : I) 1) b)

Soit a l'élément neutre da la loi $*$ dans $\mathbb{R}$, alors : $a*x = x*a = x$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ a+x-e^{ax}+1 = x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ e^{ax} = a+x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ \ln(e^{ax}) = \ln(a+x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ ax = \ln(a+x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ ax+0 = 0x+\ln(a+x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ \begin{cases} oubien\ \ a=0 \\ oubien\ \ln(a+1)=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow\ a = 0\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'élément neutre de la loi $*$ est 0

Remarque : j'ai utilisé le fait que deux polynômes $\left(\sum_0^n a_i x^i\right)\ et\ \left(\sum_0^n b_i x^i\right)$ sont égaux si et seulement si $\forall(1\le i\le n)\ ;\ a_i = b_i$

La Question : I) 2)

L'équation $3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions réelles différentes $\alpha\ et\ \beta$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+\alpha-e^{2\alpha}=0 \\ 3+\beta-e^{2\beta}=0 \end{cases};\ \alpha\neq\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\alpha-e^{2\alpha}+1=0 \\ 2+\beta-e^{2\beta}+1=0 \end{cases};\ \alpha\neq\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2*\alpha=\alpha*2=0 \\ 2*\beta=\beta*2=0 \end{cases};\ \alpha\neq\beta$$

Dire que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$ revient à démontrer, pour tout triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, la chose suivante : $(x*y)*z = x*(y*z)$ $(\blacksquare)$.
Réfuter l'associativité revient donc à trouver un triplet qui ne vérifie pas l'égalité $(\blacksquare)$ (un contre exemple), il suffit de remarquer que le triplet $(\alpha,2,\beta)$ accomplira la tache avec rigueur.
d'une part : $\alpha*(2*\beta) = \alpha*0 = \alpha$
et d'autre part : $(\alpha*2)*\beta = 0*\beta = \beta$
comme $\alpha\neq\beta$ alors $\alpha*(2*\beta)\neq(\alpha*2)*\beta$
Donc c'est gagné.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : En algèbre linéaire, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie non vide F de E stable par combinaisons linéaires.
Cette stabilité s'exprime par : la somme de deux vecteurs de F appartient à F. et le produit d'un vecteur par un scalaire appartient à F aussi.
Premièrement, F est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de F. soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux éléments de F et soit α un nombre réel. Pour simplifier, on pose $M(x,y) = M$ et $M'(x',y') = M'$

$$\alpha M + M' = \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ \dfrac{y}{2} & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \dfrac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2\alpha y - 2y' \\ \dfrac{\alpha y}{2} + \dfrac{y'}{2} & \alpha x + x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -2(\alpha y - y') \\ \dfrac{\alpha y + y'}{2} & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha x + x' ; \alpha y + y') \in F$$

$Ainsi$: $(\forall\,(M,M') \in F^2), (\forall \alpha \in \mathbb{R})$; $(\alpha M + M') \in F$

Donc F est stable par les combinaisons linéaires D'où $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

La Question : II) 2)

D'abord F est une partie non-vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient des matrices carrées d'ordre 2 dont l'élément $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fait partie.
Soient $M = M(x,y)$ et $M' = M'(x',y')$ deux éléments de F .

$$M \times M' = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \dfrac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \dfrac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -2xy' - 2x'y \\ \dfrac{x'y}{2} + \dfrac{xy'}{2} & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -2(xy' + x'y) \\ \dfrac{(x'y + xy')}{2} & (xx' - yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy' ; x'y + xy') \in F$$

Ainsi : $(\forall\, M, M' \in F)$; $M \times M' \in F$. Donc F est stable par la multiplication matricielle $\times$.
C-à-d : F est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

La Question : II) 3) a)

Etant donnée φ une application définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F qui , à tout complexe $(x+iy)$, associe la matrice $M(x,y)$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \mapsto & F \\ & (x+iy) & \mapsto & M(x,y) \end{array}$$

L'application φ est un homomorphisme si et seulement si elle vérifie la chose suivante :
$(\forall z, z' \in \mathbb{C}^*)$; $\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$
Soient $(x+iy)$ et $(x'+iy')$ deux nombres complexes non-nuls .

$$\varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big) = \varphi\big((xx'-yy') + i(xy'+x'y)\big)$$
$$= M\big((xx'-yy') ; (xy'+x'y)\big)$$

Or, d'après le résultat de la question 2), On a vu que $M(x,y) \times M'(x',y') = M(xx'-yy' ; x'y+xy')$

C-à-d $\varphi(x+iy) \times \varphi(x'+iy') = M(x,y) \times M'(x',y')$
$$= M(xx'-yy' ; x'y+xy')$$
$$= \varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big)$$

La Question : II) 3) b)

Pour montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$, il suffit de montrer que l'application $\varphi :$ $\mathbb{C}^* \mapsto F^*$ est une bijection.
Soit $M(a,b)$ un élément de F^* .
Donc $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$; $(a,b) \neq (0,0)$.
L'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}^*$ et c'est le nombre complexe $a+ib$ car $\varphi(x+iy) = M(a,b)$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \dfrac{y}{2} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \dfrac{b}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \neq 0 \\ y = b \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi ,On a montré la chose suivante :
$(\forall M(a,b) \in F)(\exists!\ (x+iy) \in \mathbb{C}^*)$: $\varphi(x+iy) = M(a,b)$.
D'où φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F^* .
C-à-d : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$.

La Question : II) 3) c)

On a vu que l'application $\varphi :$ $(\mathbb{C}^*,\times) \mapsto (F^*,\times)$ est un isomorphisme, Donc l'image du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ est le groupe $(F^*,\times)$.
En d'autres termes : $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (F^*,\times)$
ou encore $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (F^*,\times)$. C-à-d que $(F^*,\times)$ est un groupe qui hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$. Comme $(1+0i)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ alors $\varphi(1+0i) = M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ est l'élément neutre du groupe $(F^*,\times)$.

Comme le symétrique d'un élément $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$ Alors le symétrique de l'élément $M(x,y)$ dans F^* est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} \,;\, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

La Question : II) 4)

Pour montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :
1) $(F,+)$ est un groupe abélien d'élmnt neutre $(0,0)$
2) $\big((F\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)\big)$ est un groupe.
3) la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + dans F
4) la loi $\times$ est commutative dans F.

$(F,+)$ est un groupe commutatif puisque $(F,+)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
Remarquer que $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F \neq \emptyset$
et $M(x,y) - M(x',y') = M(x-x' \,;\, y-y') \,\epsilon\, F$

$(F\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)$ est un groupe abélien puisque c'est $(F^*,\times)$ qu'on a démontré dans 3)c).

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Donc c'est la même chose dans F puisque F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La loi $\times$ est commutative dans F comme on l'avait démontré dans 3)c).

La conclusion : $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Rappel : du petit Théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $(a^{p-1}-1)$ est un multiple de p.
Autrement-dit, sous les mêmes conditions sur a ; p, on écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

$$\begin{cases} p \,\epsilon\, \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\begin{aligned} 13 \,\epsilon\, \mathbb{P} \quad &\Longrightarrow \quad a^{12} \equiv 1[13] \;;\; d'après\ Fermat \\ &\Longrightarrow \quad (a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13] \\ &\Longrightarrow \quad a^{2016} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

On pose $x \wedge 13 = \delta$. comme 13 est un nombre premier alors : ou bien $\delta = 1$,ou bien $\delta = 13$. car les diviseurs de 13 sont $\{-13,-1,1,13\}$. pour montrer que $\delta = 1$ il suffit de réfuter le cas $\delta = 13$ .On le suppose vrai, alors $x \wedge 13 = 13$ C-à-d que 13 divise x D'où l'existence d'un certain x dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 13k$

Comme x est solution de l'équation (E) Alors $x^{2015} \equiv 2[13]$. D'où $(13k)^{2015} \equiv 2[13] \rightsquigarrow (1)$.
Or , $13 \equiv 0[13]$. Donc $(13k)^{2015} \equiv 0[13] \rightsquigarrow (2)$.
Par transitivité du signe $(\equiv)$, et en partant de (1) et (2) on conclut que $2 \equiv 0[13]$. C-à-d que 13 divise 2 (contradiction) Donc la proposition $\delta = 13$ qu'on a supposé être vraie, a abouti à une contradiction (13 divise 2). Ce qui signifie qu'elle est fausse, Alors $\delta \neq 13$. Ainsi $x \wedge 13 = \delta = 1$.
C-à-d que x et 13 sont premiers entre eux .

La Question : I) 2) b)

Soit x une solution de l'équation (E).
x est solution de $(E) \Longrightarrow \quad x \wedge 13 = 1 \,,\ selon\ I)2)a)$

$$\Longrightarrow \quad x^{2016} \equiv 1[13] \;\; (3) \;\;;\;\; d'après\ I)1)$$

$$\begin{aligned} x\ est\ solution\ de\ (E) \quad &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv 2[13] \\ &\Longrightarrow \quad x \cdot x^{2015} \equiv 2x[13] \rightsquigarrow (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)\ et\ (4) \quad &\Longrightarrow \quad 2x \equiv 1[13] \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2x \equiv 1[13] \\ 14 \equiv 1[13] \;;\; solution\ particulière \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad 2x - 14 \equiv 0[13] \\ &\Longrightarrow \quad 2(x-7) \equiv 0[13] \\ &\Longrightarrow \quad (x-7) \equiv 0[13] \;;d'après\ Gauss \\ &\Longrightarrow \quad x \equiv 7[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

Pour résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer l'équivalence suivante :
x est solution de $(E) \iff x = 7 + 13k \;; k\epsilon\mathbb{Z}$.
Pour l'implication directe, si x est solution de (E), alors d'après la question 2)b) On a : $x \equiv 7[13]$ d'où $x = 13k + 7 \;;\; k\epsilon\mathbb{Z}$. Pour l'implication inverse, on se sert de la compatibilité de la congruence modulo avec la multiplication :

$$\begin{aligned} x = 7 + 13k \quad &\Longrightarrow \quad x \equiv 7[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv (7^3)^{671} \times 7^2[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv (343)^{671} \times 49\,[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv 5^{671} \times 10[13]\ car \left| \begin{matrix} 343 \equiv 5[13] \\ 49 \equiv 10[13] \end{matrix} \right. \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv (5^2)^{335} \times 5^1 \times 10[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv 25^{335} \times 50[13] \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv (-1)^{335} \times 11[13]\ car \left| \begin{matrix} 25 \equiv -1[13] \\ 50 \equiv 11[13] \end{matrix} \right. \\ &\Longrightarrow \quad x^{2015} \equiv -11[13] \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{x^{2015} \equiv 2[13]}\ car -11 \equiv 2[13] \end{aligned}$$

D'où l'implication suivante :

$$\left| \begin{matrix} x = 7 + 13k \\ k \,\epsilon\, \mathbb{Z} \end{matrix} \right. \Longrightarrow \quad x\ est\ solution\ de\ (E)\ dans\ \mathbb{Z}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $\mathcal{S} = \{\, 7 + 13k \;;\; k\epsilon\mathbb{Z} \,\}$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

On tire au hasard une boule portante le chiffre n. pour que n soit une solution de l'équation (E), il suffit qu'il s'écrive sous la forme $7+13k$ avec k est un entier relatif et $1 \le n \le 50$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 1 \le 7+13k \le 50 \;\; et \;\; k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad -6 \le 13k \le 43 \;\; et \;\; k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-6}{13} \le k \le \frac{43}{13} \;\; et \;\; k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad 0{,}46 \le k \le 3{,}3 \;\; et \;\; k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad k\,\epsilon\,[-0{,}46\,;3{,}3] \cap \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad k\,\epsilon\,\{0\,;1\,;2\,;3\,\} \\
&\Longrightarrow \quad (7+13k)\,\epsilon\,\{7\,;20\,;33\,;46\,\}
\end{aligned}$$

La Question : II) 2)

On considère l'événement A défini comme suit :

$$A = \text{" } tirer\ une\ boule\ numéroté\ 7, 20, 33\ ou\ 46 \text{"}$$

Signalons que l'hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée puisqu'on a affaire à un tirage au hasard d'une boule parmi cinquante autres toutes identiques. D'où $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_{50}^1} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Rappel : soit A un événement, de probabilité p , dans une expérience aléatoire. Si A est répété indépendamment n fois, alors la probabilité correspondante à la vérification de A exactement k fois est donnée par $p_K = C_n^K \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ fin.

A est un événement de probabilité $\frac{2}{25}$.

Cet événement est répété trois fois.

Ainsi, la probabilité correspondante à l'obtention de A exactement trois fois est donnée par :

$p_3 = C_3^2 \times (p(A))^2 \times (1-p(A))^{3-2} = \frac{276}{15625}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1+i)^2 - 4(2+2i) \\
&= 1+2i-1-8-8i \\
&= 1-6i-9 \\
&= 1^2 - 2(1)(3i) + (3i)^2 \\
&= (1-3i)^2
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

D'après la question 1)a), On remarque que $(1-3i)$ est une racine carrée du déterminant Δ . Ainsi, les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ seront donc $z_1\ et\ z_2$ définies comme suit :

$$\left| \begin{aligned} z_1 &= \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = 2i \\ z_2 &= \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = 1-i \end{aligned} \right.$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i-1 \\
\Longrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= |i-1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\
\Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}e^{\left(\frac{i3\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$On\ a : \;\; aff(A) = z_1 \quad et \quad aff(B) = z_2$$

E est le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad aff(E) = \frac{aff(A)+aff(B)}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{z_1+z_2}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{2i+1-1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Rappel : Soit $r_{(A,\theta)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \longmapsto M'(z') \end{array}$

une rotation dans le plan complexe .

$r(M) = M' \;\; \Leftrightarrow \;\; (z' - z_A) = e^{i\theta}(z - z_A)$

On a : $A(z_1), B(z_2), E\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)$ $et\ C(c)$ et on considère la rotation r dans le plan complexe définie par :

$$r_{\left(A,\frac{-\pi}{2}\right)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \longmapsto M'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned}
r(E) = c \;\; &\Leftrightarrow \;\; (z_c - z_1) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_E - z_1) \\
&\Leftrightarrow \;\; (c-2i) = -i\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2i\right) \\
&\Leftrightarrow \;\; c = 2i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 2 \\
&\Leftrightarrow \;\; c = \frac{3i}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$$
$$=\left(\frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}i-2i}{1-i-2i}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{-5}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)\times\left(\frac{1+3i}{1+3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+9i+i-3}{1-(-9)}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{10i}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

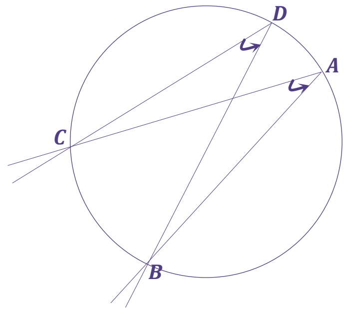
Rappel : soient $A(z_A)\,,B(z_B)\,,C(z_C)\ et\ D(z_D)$ quatre points dans le plan complexe.
Si la quantité $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)$ est un nombre réel $\left(\arg\left(\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\right)\equiv 0[\pi]\right)$, Alors, ou bien les 4 points sont colinéaires, Ou bien ils sont cocycliques .
Fin du rappel.

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\times\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)+\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\ [\pi]$$

Si A, B et D sont colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ le sont.
Donc $(\exists k\in\mathbb{R})$; $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
C-à-d : $(z_b-z_A)=k(z_c-z_A)$.
C-à-d : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\in\mathbb{R}\ \rightsquigarrow\ (*)$

$$Or\ ,\ \ \frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}=\left(\frac{1-i-2i}{\frac{-3}{2}+\frac{3i}{2}-2i}\right)=\left(\frac{1-3i}{\frac{-3}{2}-\frac{i}{2}}\right)$$
$$=-2\left(\frac{1-3i}{3+i}\right)\times\left(\frac{3-i}{3-i}\right)$$
$$=-2\left(\frac{3-i-9i-3}{9+1}\right)$$
$$=\frac{-1}{5}(-10i)=2i\in i\mathbb{R}$$

Ce qui est en contradiction avec $(*)$.
D'où A , B et C ne sont pas colinéaires .
de même pour A, B et D. Ainsi, comme ces 4 points ne sont pas colinéaires, alors ils sont cocycliques.



$$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\ [\pi]$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(+\infty)}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}\right)$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(-\infty)}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

La Question : 1) b)

On a $\frac{-3}{2}(x-n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est une fonction affine. Donc $e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car c'est une composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{R}$. d'où $1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Ainsi $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (toujours positive) . Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f_n'(x)=\frac{-\left(e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}=\frac{-\left(\frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

La Question : 1) c)

$$On\ a\ :\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_n'(x) = \left(\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}\right)$$

$f_n'(x)$ est une quantité positive sur $\mathbb{R}$ comme étant une quotient de deux quantités strictement positives. Ainsi : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_n'(x) > 0$
D'où f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La Question : 2) a)

Rappel : Soit D_f le domaine de définition d'une fonction réelle f et soit $A(\alpha,\beta)$ un point dans le plan réel . On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à A si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

$$\left|\begin{array}{l}(\forall\ x\ \epsilon\ D_f)\ ;\ (\alpha+x)\ \epsilon\ D_f\ \ et\ \ (\alpha-x)\ \epsilon\ D_f\\ (\forall\ x\ \epsilon\ D_f)\ ;\ f(\alpha-x)=f(\alpha+x)\end{array}\right.$$

Fin du rappel.

On a $f_n$est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors on aura toujours $(n-x)\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ et\ \ (n+x)\ \epsilon\ \mathbb{R}$ à partir du moment où x appartient à $\mathbb{R}$ quelquesoit n dans $\mathbb{N}$. soit $n\ \epsilon\ \mathbb{N}^*$

$$f_n(n-x)+f_n(n+x) = \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n-x-n)}}+\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n+x-n)}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}x}}+\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}x}}$$

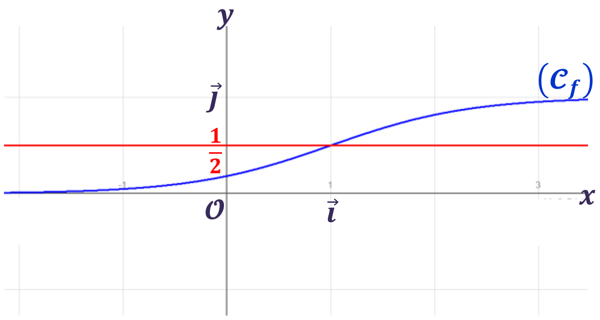
$$= \frac{\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)+\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)}{\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)}$$

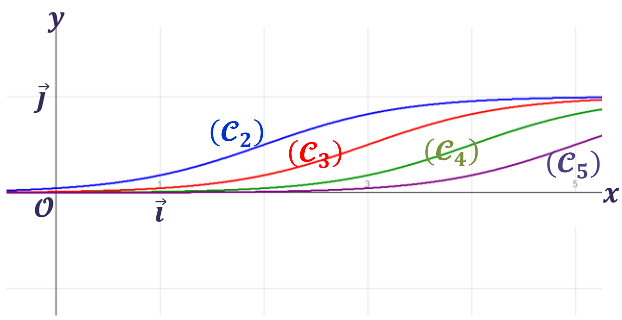
$$= \frac{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}}{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}} = 1$$

Ainsi $f_n(n-x)+f_n(n+x) = 2\times\frac{1}{2}$ Donc la courbe representant f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est symetrique par rapport à $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$

La Question : 2) b)

La représentation graphique de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ representant la fonction $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.





La Question : 2) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire définie par l'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et les droites d'équations : $x=0\,,x=1\ \ et\ \ y=0$
$\mathcal{A} = \int_0^1|f_1(x)|\,dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx$ car f_1 est positive sur $[0,1]$. par un procédé de changement de variables, on pose $= e^{\frac{-3}{2}(x-1)}$:

$$\frac{dt}{dx} = \left(e^{\frac{-3}{2}(x-1)}\right)' = \frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-1)} = \frac{-3t}{2}$$

$$Ainsi\ :\ dx = \left(\frac{-2}{3}\right)\frac{dt}{t}$$

$$On\ a\ aussi\ :\ \left|\begin{array}{l}x=0\ \Leftrightarrow\ t=e^{\frac{3}{2}}\\ x=1\ \Leftrightarrow\ t=1\end{array}\right.$$

$$\mathcal{A} = \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}\right)dx = \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)\left(\frac{-2dt}{3t}\right)$$

$$= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t(t+1)}\right)dt$$

$$= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}\right)dt+\frac{2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{-2}{3}[\ln|t|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1+\frac{2}{3}[\ln|t+1|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1$$

$$= \frac{-2}{3}\left(0-\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\ln 2-\ln\left(1+e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$= 1+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\approx 0{,}327$$

La Question : 3) a)

Soit g_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x, associe son image $(f_n(x)-x)$.

$$\begin{array}{llll}g_n\ : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & f_n(x)-x\end{array}$$

$g_n(x)$ est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f_n(x)$ et x le sont.

$$g_n'(x) = f_n'(x) - 1 = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - \left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - 1 - 2e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - e^{-3(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} + 1 + e^{-3(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$

Donc : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $g_n'(x) < 0$ d'où g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors comme g_n est continue et elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g_n(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g_n(x)\right[= \mathbb{R}$$

En réalité, g_n est une bijection de n'importe quel intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $g_n(I)$.
On pose $I =]0,n[\subset \mathbb{R}$, Alors $g_n :]0,n[\longmapsto g_n(]0,n[)$ est une bijection.

$$g_n(]0,n[) = \left]\lim_{x\to n^-} g_n(x)\ ;\ \lim_{x\to 0^+} g_n(x)\right[$$

$$= \left]\frac{1}{2} - n\ ;\ \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$$

c-à-d $g_n :]0,n[\longmapsto \left]\frac{1}{2} - n\ ;\ \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$ est une bijection .
Et d'après la définition d'une bijection on conclut que :

$$\left(\forall\, y \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n\ ;\ \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[\right), (\exists!\ u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) : g_n(u_n) = y$$

En particulier, pour $y = 0$ (car $\frac{1}{2} - n < 0 < \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}$)

On écrit : $0 \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n\ ;\ \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$

$$\Rightarrow\ (\exists!\ u_n \,\epsilon\,]0,n[\,)\ :\ g_n(u_n) = 0$$
$$\Rightarrow\ (\exists!\ u_n \,\epsilon\,]0,n[\,)\ :\ f_n(u_n) - u_n = 0$$
$$\Rightarrow\ (\exists!\ u_n \,\epsilon\,]0,n[\,)\ :\ f_n(u_n) = u_n$$

C'est l'élégance qui m'a conduit à répondre ainsi. Sinon, si vous aimeriez être typique, vous pouvez répondre comme suit : On pose $g_n(x) = f_n(x) - n$. la fonction g_n est continue sur $]0,n[$ il est trop facile de démontrer que $g_n(0) \times g_n(n) < 0$ Donc d'après le TVI on écrit : $\exists\, u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $g_n(u_n) = 0$ comme g_n est continue et est strictement décroissante $(g_n'(x) < 0)$ Alors u_n est unique (g_n bijective) . D'où : $\exists!\ u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $f_n(u_n) = u_n$

La Question : 3) b)

$$-1 < 0 \ \Rightarrow\ x - n - 1 < x - n$$
$$\Rightarrow\ \frac{-3}{2}(x-n-1) > \frac{-3}{2}(x-n)$$
$$\Rightarrow\ e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\ 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$\Rightarrow\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

La Question : 3) c)

$$n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \ \Rightarrow\ u_n < n$$
$$\Rightarrow\ f_n(u_n) < f_n(n)\ ;\ car\ f_n\ est\ \nearrow$$
$$\Rightarrow\ u_n < \frac{1}{2}\ ;\ car\ \left| \begin{array}{l} f_n(u_n) = u_n \\ f_n(n) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow\ \left| \begin{array}{l} 0 < u_n < \frac{1}{2} \\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow\ (u_{n+1} - u_n) < 1$$
$$\Rightarrow\ u_{n+1} - 1 < u_n$$
$$\Rightarrow\ u_{n+1} - 1 - n < u_n - n$$
$$\Rightarrow\ \frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1+n)) > \frac{-3}{2}(u_n - n)$$
$$\Rightarrow\ e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))} > e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}$$
$$\Rightarrow\ f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_n)$$
$$\Rightarrow\ u_{n+1} < u_n\ ;\ car\ \left| \begin{array}{l} f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} \\ f_n(u_n) = u_n \end{array} \right.$$

D'où : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} < u_n$ C-à-d $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante et comme elle est minorée par 0 (car $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n < \frac{1}{2}$).
Alors elle est convergente.

La Question : 3) d)

On part du fait que $f_n(u_n) = u_n$
C-à-d : $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}} = u_n$. par passage aux limites, on retrouve bien :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}\right) = \lim_{n\infty}(u_n)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(l-\infty)}} = l$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+e^{+\infty}} = l$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\infty} = l$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{+\infty} = l$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = l$$

$$D'où\ finalement\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On démontre la parité de la fonction g à l'aide d'un procédé de changement de variable.

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt$$

$$On\ pose\ :\ l = -t \ \Longrightarrow\ dt = -dl$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\cos t}{t} = \frac{\cos(-l)}{-l} = \frac{\cos l}{-l} = \frac{-\cos l}{l} \\ t = -x \ \Leftrightarrow\ l = x \\ t = -3x \ \Leftrightarrow\ l = 3x \end{array}\right.$$

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_{x}^{3x} \left(\frac{-\cos l}{l}\right)(-dl)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos l}{l}\right) dl = g(x)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \ ; \quad \begin{array}{c} Si\ vous\ n'êtes\ pas\ dérrangés \\ t\ et\ l\ sont\ deux\ variables\ muettes \end{array}$$

$$= g(x)$$

Comme $g(-x) = g(x)$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$ Alors g est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$: C-à-d la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La Question : 2)

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\cos t}{t}$ et soit a un élément de $]0,+\infty[$. la fonction φ est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions toutes continues sur $]0,+\infty[$. Donc φ admet des primitives sur $]0,+\infty[$. En particulier, φ admet une primitive ψ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a et qui est définie comme suit : $\begin{cases} \psi(x) = \int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$ la fonction ψ est dérivables et admet φ comme dérivée sur $]0,+\infty[$.

C-à-d : $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x} = \varphi(x)$; $\forall x > 0$.

ou encore : $\frac{d}{dt}\left(\int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt\right) = \frac{\cos x}{x}$.

Et voici un récapitulatif :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= \int_x^{a} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\int_a^{x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\psi(x) + \psi(3x) \\ &= \psi(3x) - \psi(x) \end{aligned}$$

ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$, Donc $\psi(3x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions toutes définies et dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc $x \longmapsto \psi(3x) - \psi(x)$ est dérivable comme étant différence de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

Ainsi : $g'(x) = \big(\psi(3x) - \psi(x)\big)'$

$$\begin{aligned} &= 3x \cdot \psi'(3x) - \psi'(x) \\ &= 3x \cdot \varphi(3x) - \varphi(x) \\ &= 3x \cdot \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit x un élément de $]0,+\infty[$,

$$g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_x^{3x} \left(\underbrace{\cos t}_{v'(t)}\right)\left(\underbrace{\frac{1}{t}}_{u(t)}\right) dt$$

$$\begin{aligned} &= [u(t) \times v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t) \times v(t)\, dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{-\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soit x un élément de $]0,\infty[$ On a : $|\sin t| \leq 1 \rightsquigarrow (1)$

Aussi : $x \leq t \Longrightarrow x^2 \leq t^2 \Longrightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow (2)$

$$(1) \times (2) \Longrightarrow \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1}{x^2}\right) dt$$

$$\Longrightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right) \int_x^{3x} 1\, dt$$

$$\Longrightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right)(3x - x)$$

$$\Longrightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \frac{2}{x}$$

Récapitulatif :

$$|g(x)| = \left|\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt\right|$$
$$= \left|\left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|$$
$$= \left|\frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|$$
$$\leq \left|\frac{\sin 3x}{3x}\right| + \left|\frac{\sin x}{x}\right| + \left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{3x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right| + \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt$$
$$\leq \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x}$$
$$\leq \frac{10}{3x}$$

D'où : $(\forall x > 0)\ ;\ |g(x)| \leq \frac{10}{3x}$

$$comme\ :\ |g(x)| \leq \frac{10}{3x}$$

$$Alors\ :\ \underbrace{0}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leq |g(x)| \leq \underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}}$$

$$ou\ encore\ :\ \underbrace{\left(\frac{-10}{3x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leq |g(x)| \leq \underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

$$D'où :\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

La Question : 4) a)

D'une part : $\cos t \leq 1 \Rightarrow 1 - \cos t \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos t}{t} \geq 0\ ;\ car \left|\begin{array}{l} x \leq t \leq 3x \\ x > 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (1) : \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \geq 0\ ;\ car\ 0 < x < 3x$$

D'autre part :

$$1 - \cos t \leq t \Rightarrow \frac{1-\cos t}{t} \leq 1\ ;\ car\ t \geq x > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq \int_x^{3x} 1\,dt$$

Car $x < 3x$ et la fonction $\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$$\Rightarrow \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq 2x$$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow (\forall x > 0)\ ;\ 0 \leq \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq 2x$$

La Question : 4) b)

$$\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)dt = \int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt - \int_x^{3x}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= g(x) - [\ln|t|]_x^{3x}$$
$$= g(x) - (\ln 3x - \ln x)\ ;\ x \neq 0$$
$$= g(x) - \ln\left(\frac{3x}{x}\right)\ ;\ x \neq 0$$
$$= g(x) - \ln 3$$

La Question : 4) c)

$$(\forall x > 0)\ ;\ \underbrace{0}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0} \leq \int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq \underbrace{2x}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0}$$

$$Donc\ :\ \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\right) = 0$$

$$Aussi\ :\ \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)dt\right) = 0$$

$$comme\ :\ g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)dt$$

$$Alors\ :\ \lim_{x\to 0^+}(g(x) - \ln 3) = \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)dt\right)$$

$$C-à-d\ :\ \lim_{x\to 0^+}(g(x) - \ln 3) = 0$$

$$Ou\ encore\ :\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \ln 3$$

2016 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Tout d'abord, E est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ *et* $M(0,0) = \mathcal{O} \in E$.
soient (x,y) et (a,b) deux éléments de E :

$$M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y-a-b & 0 & -2y+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & x-y-a+b \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a\ ;\ y-b) \in E \quad car \ \left| \begin{array}{l} (x-a) \in \mathbb{R} \\ (y-b) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

D'où : $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

$$M(x,y) \times M(x',y') =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') + (xy'+yx') & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy'+yx') & 0 & (xx'-yy') - (xy'+yx') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \in E \ ; \ car \ \left| \begin{array}{l} xx'-yy' \in \mathbb{R} \\ xy'+yx' \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La Question : 3) a)

Soient $z = x+iy$ et $z' = z' + iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ et soit φ l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \ (\mathbb{C}^*,\times) & \longmapsto & (E,\times) \\ z = x+iy & \longmapsto & \varphi(z) = M(x,y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z \times z') &= \varphi\big((x+iy)(x'+iy')\big) \\ &= \varphi\big((xx'-yy') + i(xy'+yx')\big) \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(x,y) \times M(x',y') \ ; \ d'après\ 2) \\ &= \varphi(z) \times \varphi(z') \end{aligned}$$

Ainsi φ est 1 homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

La Question : 3) b)

Soit $M(a,b)$ un élément de E^* .
l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution $x+iy = a+ib$ Donc :
$(\forall M(a,b) \in E^*), (\exists!\ (x+iy) \in \mathbb{C}^*) :\ \varphi(x+iy) = M(a,b)$
c-à-d que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans E^* .
Dés lors : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
comme φ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E
et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif,
alors la structure algébrique de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sera transmise vers $(E^*,\times)$ via l'application φ.
$(\mathbb{C}^*,\times)$ groupe commutatif $\Rightarrow$ $(E^*,\times)$ Aussi .
$(1+i0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times)$ $\Rightarrow$
$\varphi(1+i0) = M(1,0)$ est l'élément neutre pour $(E^*,\times)$

La Question : 4)

$(E,+,\times)$ est un groupe commutatif car :

$$car \ : \left| \begin{array}{l} \blacksquare \ (E,+) \ est \ un \ groupe \\ \blacksquare \ (E^*,\times) \ est \ un \ groupe \ commutatif \\ \blacksquare \ \times \ est \ distributive \ par \ rapport \ à + \\ \blacksquare \ \times \ est \ commutatif \ dans \ E \end{array} \right.$$

La distributivité de $\times$ par rapport à $+$:

$$\begin{aligned} & M(a,b) \times \big(M(x,y) + M(x',y')\big) \\ &\quad = M(a,b) \times M(x+x'\ ;\ y+y') \\ &\quad = M\big(a(x+x') - b(y+y')\ ;\ a(y+y') + b(x+x')\big) \\ &\quad = M(ax+ax'-by-by'\ ;\ ay+ay'+bx+bx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M(a,b) \times M(x,y) + M(a,b) \times M(x',y') \\ &\quad = M(ax-by\ ;\ ay+bx) + M(ax'-by'\ ;\ ay'+bx') \\ &\quad = M(ax-by+ax'-by'\ ;\ ay+bx+ay'+bx') \end{aligned}$$

Donc la distributivité à gauche est vérifiée.
Même procédé pour la distributivité à droite.
Pour la commutativité de $\times$ dans E :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ y'x+x'y) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

La Question : 5) a)

$$A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

La Question : 5) b)

Soient $M(x,y)$ une matrice de E et $M(x',y')$ son symetrique dans E.

$$\Leftrightarrow \quad M(x,y) \times M(x',y') = M(x',y') \times M(x,y) = I$$
$$\Leftrightarrow \quad M(x,y) \times M(x',y') = I \;\; car \;\; \times \;\; est \; commutative$$
$$\Longrightarrow \quad A \times M(x,y) \times M(x',y') = A \times I = A$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{O} \times M(x',y') = A$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{O} = A$$
$$\Longrightarrow \quad 0 = 1 \;\; ; \;\; c'est \; absurde$$

Donc $M(x,y)$ n'est pas inversible (n'admet pas de symetrique)

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} 173/(a^3+b^3) &\Longrightarrow (a^3+b^3) \equiv 0[173] \\ &\Longrightarrow a^3 \equiv -b^3[173] \\ &\Longrightarrow (a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57}[173] \\ &\Longrightarrow a^{171} \equiv -b^{171}[173] \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$\begin{aligned} 173/a &\Leftrightarrow 173/a^3 \;\; ; \;\; 173 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow (a^3+b^3) \equiv a^3[173] \;\; car \; b^3 \equiv a^3[173] \\ &\Leftrightarrow b^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow 173/b^3 \\ &\Leftrightarrow 173/b \, ; \;\; car \; 173 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

$$173/a \;\; \Longrightarrow \;\; 173/b \;\; ; \;\; d'après \; 2)$$
$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 173/a \\ 173/b \end{array} \right.$$
$$\Longrightarrow \;\; 173 \; divise \; toute \; combinaison \; linéaire \; en \; a \; et \; b$$
$$\Longrightarrow \;\; 173/(a+b)$$

La Question : I) 4) a)

Rappel du Théorème de Fermat :

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \;\; \Longrightarrow \;\; a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Comme 173 ne divise pas le nombre a, alors 173 ne divise pas b à cause de l'équivalence de la question 2) : $173/a \;\; \Leftrightarrow \;\; 173/b$

On peut Donc écrire : $\left| \begin{array}{l} 173 \wedge a = 1 \\ 173 \wedge b = 1 \end{array} \right.$

Ainsi d'après Fermat : $\begin{cases} a^{172} \equiv 1[173] \\ a^{172} \equiv 1[173] \end{cases}$

D'où : $a^{172} \equiv b^{173}[173]$

La Question : I) 4) b)

$$\begin{cases} a^{171} \equiv -b^{171}[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a(a^{171}) \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a^{172} \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \;\; b^{172} \equiv -a(b^{171})[173] \;\; ; \;\; la \; transitivité$$
$$\Longrightarrow \;\; 173/b^{171}(a+b)$$
$$\Longrightarrow \;\; b^{171}(a+b) \equiv 0[173]$$

La Question : I) 4) c)

$$173 \wedge b = 1 \;\; \Longrightarrow \;\; 173 \wedge b^{171} = 1$$
$$\Longrightarrow \;\; 173/(a+b) \;\; ; \;\; car \left| \begin{array}{l} 173/b^{171}(a+b) \\ \quad c'est \;\; Gauss \end{array} \right.$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\begin{aligned} (x,y) \;\; est \;\; solution \;\; de \;\; (E) &\Longrightarrow \;\; x^3+y^3 = 173(xy+1) \\ &\Longrightarrow \;\; (x+y)(x^2-xy+y^2) = 173(xy+1) \\ &\Longrightarrow \;\; 173k((x-y)^2+xy) = 173(xy+1) \\ &\Longrightarrow \;\; k(x-y)^2+kxy = xy+1 \\ &\Longrightarrow \;\; k(x-y)^2+(k-1)xy = 1 \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

$$k \in \mathbb{N}^* \;\; \Longrightarrow \;\; k \geq 1 \;\; \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} ou \; bien \;\; k=1 \\ ou \; bien \;\; k>1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} Si \;\; k>1 \;\; &\Longrightarrow \;\; (k-1)>0 \\ &\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} et \; (k-1)xy > 0 \\ et \;\; k(x-y)^2 > 1 \;\; ; \;\; x \neq y \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \;\; k(x-y)^2+(k-1)xy > 1 \\ &\Longrightarrow \;\; 1>1 \;\; ; \;\; c'est \; absurde \\ &\Longrightarrow \;\; k=1 \;\; ; \;\; c'est \; le \; cas \; restant \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x+y = 173 \times 1 \\ 1(x-y)^2+(1-1)xy = 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x+y = 173 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x,y)=(87,86) \\ \text{ou bien } (x,y)=(86,87) \end{cases}$$

soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{2*}$. Le résultat est :

$$(x,y)\,\epsilon\,\mathcal{S} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} ou\ bien\ (x,y)=(87,86) \\ ou\ bien\ (x,y)=(86,87) \end{cases}$$

Inversement : $\left| \begin{array}{l} 87^3+86^3=1294559 \\ 173(87\times 86+1)=1294559 \end{array} \right.$

Ainsi : $87^3+86^3=173(87\times 86+1)$.
C-à-d que : $(87,86)\,\epsilon\,\mathcal{S}\ \ et\ \ (86,87)\,\epsilon\,\mathcal{S}$

La conclusion : $\mathcal{S}=\{(87,86)\,;\,(86,87)\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\left(\frac{z_1-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}{z_2-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\right)\times\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

$$=\frac{z_1(z_1+z_2)-2z_1z_2}{z_2(z_1+z_2)-2z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1}{z_2}\times\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}$$

$$=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_1}$$

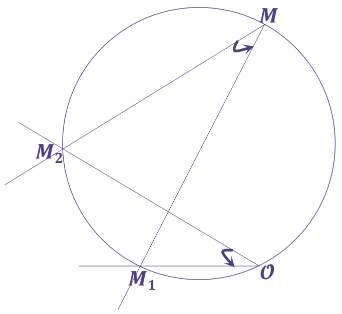
$$=-1$$

La Question : 1) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)\times\left(\frac{z_{M_2}-z_O}{z_{M_1}-z_O}\right)=-1\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ O\ sont\ colinéaires \\ ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ O\ sont\ cocycliques \end{cases}$$

$O,M_1\ et\ M_2$ Sont supposés différents deux à deux dans l'énoncé . Alors $M,M_1,M_2\ et\ O$ ne peuvent être colinéaires. D'où les 4 points sont cocycliques . Autrement-dit : M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2



$$\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1}}\right)\ [\pi]$$

La Question : 2)

$$z_2=\overline{z_1} \;\Longrightarrow\; \bar{z}=\overline{\left(\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}\right)}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_1}}}{\overline{z_1}+\overline{\overline{z_1}}}$$

$$=\frac{2\overline{z_1}z_1}{\overline{z_1}+z_1}=\frac{2|z_1|^2}{2\mathfrak{Re}(z_1)}\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow\ z\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow\ M\,\epsilon\,(l'axe\ réelle)$$

La Question : 3) a)

Soit r la rotation définie comme suit :

$$\begin{array}{rccc} r(\theta,\alpha)\ : & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

$$r(M_1)=M_2 \;\Leftrightarrow\; \left(z_{M_2}-z_O\right)=e^{i\alpha}\left(z_{M_1}-z_O\right)$$

$$\Leftrightarrow\; z_2=e^{i\alpha}z_1$$

La Question : 3) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z_1-z}{z_2-z}=\frac{-z_1}{z_2}$$

$$\Longrightarrow\ \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=\left|\frac{-z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{-1\cdot z_1}{e^{i\alpha}\cdot z_1}\right|=\left|e^{-i\alpha}\right|=1$$

$$\Longrightarrow\ \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=1$$

$$\Longrightarrow\ |z_1-z|=|z_2-z|$$

$$\Longrightarrow\ MM_1=MM_2$$

$$\Longrightarrow\ M\ \epsilon\ la\ médiatrice\ de\ [M_1M_2]$$

La Question : 4) a)

$$\left|\begin{array}{l} z_1\ \ et\ \ z_2\ \ sont \\ solutions\ de\ (G) \end{array}\right. \;\Longrightarrow\; \begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{--\left(e^{i\theta}+1\right)}{6} \\ z_1z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{2\left(e^{i\theta}-1\right)}{e^{i\theta}+1}$$

La Question : 4) b)

Rappel des formules d'Euler :

$$\begin{cases} e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \end{cases}$$

$$z = 2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right) = 2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{i0}}{e^{i\theta}+e^{i0}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2i\sin\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}\right)$$

$$= 2i\cdot\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i0}$$

$$= 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}$$

$$= \left[2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right);\frac{\pi}{2}\right]$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant la composée de deux fonctions dérivables bien définies sur $\mathbb{R}$ $(e^{-\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R})$. On peut ainsi appliquer le **TAF** sur n'importe quel intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{cases} \varphi \ est\ continue\ sur\ [0,x] \\ \varphi\ est\ dérivable\ sur\ ]0,x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\,\theta \in]0,x[\ ;\ \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = \varphi'(\theta)$$

$$\Rightarrow 0<\theta<x\ ;\ \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) = -e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow 0<\theta<x\ ;\ \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) = e^{\theta}$$

La Question : I) 2) a)

$$\theta>0 \Rightarrow e^{\theta}>1 \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}}>1$$

$$\Rightarrow x > 1-e^{-x} > 0\ ;\ car\ x>0$$

La Question : I) 2) b)

$$\theta<x \Rightarrow e^{\theta}<e^{x} \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$

$$\Rightarrow x<e^{x}-1\ ;\ \begin{cases} avec\ 1-e^{-x}>0 \\ car\ x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+1<e^{x}$$

La Question : I) 2) c)

$$0<\theta<x \Rightarrow e^{0}<e^{\theta}<e^{x}\ ; Exp\ est\ continue\ et\ \nearrow$$

$$\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$

$$\Rightarrow \ln 1<\ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)<\ln(e^{x})$$

$$\ln\ \ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}_*^+\ est\ \nearrow$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x}}{\left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)} = \frac{\lim_{x\to0^+} e^{x}}{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)}$$

$$= \frac{e^{0}}{(e^{x})'_{/x=0}} = \frac{e^{0}}{e^{0}} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0 .

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

Donc la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote pour $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Soient $t>0\ et\ x>0$.

$$\Rightarrow 1-\mathrm{t}<\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\ ;\ \mathrm{d'après\ I)2)a)}$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x (e^{-t})\,dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale $\int_0^x dt$ car ces deux quantités sont intégrables (la continuité est vérifiée). L'orde n'a pas changé a cause de $0<x$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x < -[e^{-t}]_0^x$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{x^2}{2}\right) < -e^{-x}+1 \;\; ; \;\; (1)$$

De même, Soient $t>0$ *et* $x>0$.

$$\Rightarrow \quad 0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \;\; ; \;\; d'après\ \ I)2)c)$$

$$\Rightarrow \quad e^0 < e^{\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad 1<\frac{xe^x}{e^x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1<\frac{x\cdot e^x}{e^x\cdot(1-e^{-x})}$$

$$\Rightarrow \quad 1<\frac{x}{1-e^{-x}}$$

On multiplie les deux cotés de cette inégalité par le nombre positif $(1-e^{-x})$, il est positif car $x>0$.

$$\Rightarrow \quad (1-e^{-x})<x$$
$$\Rightarrow \quad (2):\ -e^{-x}+1<x \quad ; \ joliment$$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow \forall x>0 \ ; \ x-\frac{x^2}{2}<-e^{-x}+1<x$$

Pour $x=0$, On a : $x-\frac{x^2}{2}=-e^{-x}+1=x=0 \;\; (\blacksquare)$

On écrit finalement :

$$(\forall x\geq 0) \ ; \quad x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\leq x \quad (\blacksquare)$$

La Question : II) 2) b)

a-t-On le droit d'intégrer la formule $\blacksquare$?
Oui, effectivement, On a le droit de le faire car les trois quantités sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tout entier . Et $x>0$ gardera le sens de l'ordre inchangeable .

$$(\blacksquare) \Rightarrow \quad x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\leq x$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx < \int_0^t(-e^{-x}+1)\,dx < \int_0^t x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+cte\right]_0^t < [e^{-x}+x+cte]_0^t < \left[\frac{x^2}{2}+cte\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right) < (e^{-t}+t-1) < \left(\frac{t^2}{2}\right) \quad ; \ t>0$$

Cette inégalité reste vraie pour $t=0$.
Donc finalement on écrit :

$$(\forall t\geq 0) \ : \ \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right) < (e^{-t}+t-1) < \left(\frac{t^2}{2}\right)$$

La Question : II) 3) a)

Soit $x>0$:

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)-1}{x} = \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$
$$= \frac{xe^x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)}{x(e^x-1)}$$
$$= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{xe^x-e^x+1}{x^2e^x}\right)$$
$$= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{e^x}{e^x}\right)\cdot\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)$$
$$= \left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$

La Question : II) 3) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)\times\lim_{x\to 0^+}f(x)$$
$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$Mais\ pourquoi \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)=\frac{1}{2} \ ?$$

$$x\to 0^+ \quad \Rightarrow \quad x\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\leq(e^{-x}+x-1)\leq\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right)\leq\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \ x^2>0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right)}_{\substack{\mathbf{x\to+\infty} \\ \searrow \ \frac{1}{2}}}\leq\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)\leq\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\mathbf{x\to+\infty} \\ \searrow \ \frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$Ainsi \ : \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} f\ est\ dérivable\ à\ droite \\ en\ 0 \quad et \quad f'_d(0)=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}_f) \ admet \ la \ demi-droite \ (\Delta) \\ de \ coefficient \ directeur \frac{1}{2} \ comme \\ \quad tangente \ à \ droite \ en \ (0,1) \\ \qquad (\Delta) \ : \ y = \frac{1}{2}x + f(0) \end{array} \right.$$

La Question : II) 4) a)

Comme $x \ \longmapsto \ xe^x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables. Aussi la fonction $x \ \longmapsto \ e^x - 1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme (différence de deux fonctions dérivables) et $\forall x > 0 \ ; \ e^x - 1 \neq 0$.
Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)' = \frac{(xe^x)'(e^x-1)-(e^x-1)'xe^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-(e^x)xe^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x(1+x)(e^x-1)-xe^{2x}}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x\big((1+x)(e^x-1)-xe^x\big)}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x(xe^x-x+e^x-1-xe^x)}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$$

La Question : II) 4) b)

$$\text{On a :} \left| \begin{array}{l} (e^x-1)^2 \geq 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 1 + x \ ; \ II)2)b) \end{array} \right.$$

$$Donc \ : \ \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2} > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C-\text{à}-d \ : \ f'(x) > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C-\text{à}-d \quad f \ est \ \nearrow sur]0,+\infty[\ ainsi \ sur \ [0,+\infty[$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit la proposition $P(n) : \ u_n > 0$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 > 0$. donc l'instance $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P(n)$ est vraie .

$$\begin{aligned} P(n) \ est \ vraie \ &\Rightarrow \ u_n > 0 \\ &\Rightarrow \ f(u_n) > f(0) \ ; \ f \ est \ \nearrow [0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ f(u_n) > 1 \\ &\Rightarrow \ \ln(f(u_n)) > \ln 1 \ ; \ \ln \ est \ \nearrow]0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ u_{n+1} > 0 \\ &\Rightarrow \ P(n+1) \ est \ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi \ on \ a \ trouvé \ : \begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_n > 0$

La Question : III) 2)

$$\begin{aligned} I)2)c) \ &\Rightarrow \ 0 < \ln(f(x)) < x \ ; \ \forall x > 0 \\ &\Rightarrow \ 0 < \ln(f(u_n)) < u_n \ ; \ car \ u_n > 0 \\ &\Rightarrow \ 0 < u_{n+1} < u_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ est \ strictement \ \searrow \\ &\Rightarrow \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ converge \ car \ minorée \ par \ 0 \end{aligned}$$

La Question : III) 3)

f est une fonction définie sur $[0,+\infty[$.
On a d'après $I)2)c)$: $(\forall x > 0) \ ; \ \ln(f(x)) < x$.
Autrement-dit : $\forall \ x \in]0,+\infty[\ ; \ \ln(f(x)) \neq x$.
Mais $\ln(f(0)) = \ln 1 = 0$. Donc la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ est 0 dans l'ensemble $]0,+\infty[\cup \{0\} = [0,+\infty[$. C-à-d dans $[0,+\infty[$.

Rappel : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$
$Et \ soit \ (u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in I$.
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite , et $l \in I$
Alors $f(l) = l$.
On pose $\forall \ x \in [0,+\infty[\ ; \ \varphi(x) = \ln(f(x))$.
φ est continue sur $[0,+\infty[$ car c'est une composition de deux fonctions continues ($f \ et \ \ln$). Et $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.
On a aussi $([0,+\infty[) = \ln([1,+\infty[) = [0,+\infty[$.
Comme $(u_n)_n$ est convergente vers l alors d'après le rappel, la limite l vérifie $\varphi(l) = l$.
C-à-d : $\ln(f(l)) = l$. d'où $l = 0 = \lim_{n\infty}(u_n)$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$On \quad pose \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \ ; \ \forall x > 0$$

ψ *est* une fonction continue sur $]0, +\infty[$ comme étant une composition bien définie de trois fonctions continues.
On remarque que $(\forall x > 0)$; $\psi(x) > 0$.
Donc le signe de l'intégrale $\int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt$ depend de l'ordre entre $\ln 2$ *et* x. Si $x < \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt < 0$.
Si $x > \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt > 0$

La Question : 1) b)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.
Alors f admet des primitives sur . En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en 0 et qui vérifie : $\begin{cases} \forall x \epsilon I \ ; \ \varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \quad et \quad \varphi(a) = 0 \\ \forall x \epsilon I \ ; \ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$.
On a ψ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\ln 2 \ \epsilon \ ]0, +\infty[$
Alors ψ admet une primitive F qui s'annule en $\ln 2$
Avec : $\left| \begin{array}{l} \forall x > 0 \ ; \ F(x) = \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt \quad et \quad F(\ln 2) = 0 \\ \forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \psi(x) \end{array} \right.$.
Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Et $\forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$.

La Question : 1) c)

$$\forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$$

D'où F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La Question : 2) a)

On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$. la fonction $u(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions continues .

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} = \frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\Leftrightarrow \quad dt = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right) du$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1 \\ t = x \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{e^x - 1} \\ u = \sqrt{e^x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} = \dfrac{1}{u} \end{array} \right.$$

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt &= \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u}\right) \cdot \left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right) \cdot du \\ &= 2 \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u^2 + 1}\right) du \\ &= 2[\arctan u]_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \arctan(1)\right) \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^0 - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\,arctan(0) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} F(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\left(\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = \sqrt{e^x - 1}}} \arctan t\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

F est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $F(]0, +\infty[)$ car F est continue et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F \ : \ ]0, +\infty[\ &\longmapsto F(]0, +\infty[) \\ x \ &\longmapsto \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt \end{aligned}$$

$$F(]0, +\infty[) = \left]\lim_{x \to 0^+} F(x) \ ; \ \lim_{x \to +\infty} F(x)\right[= \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{aligned} F \ : \ ]0, +\infty[\ &\longmapsto \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x \ &\longmapsto \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$F \;:\;]0,+\infty[\;\longmapsto\; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \;\longmapsto\; 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

F est une bijection Alors :

$$\left(\forall\, y \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)(\exists!\, x \in]0,+\infty[\,) \;:\; y = f(x)$$

$$\left(soit\; y \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)(alors\; \exists!\, x \in]0,+\infty[\,) \;:\; y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow\; y = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; \tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)} = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right)+\left(\frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow\; \ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) = x$$

$Remarque :\;\; il\; est\; trop\; facile\; de\; montrer\; que :$

$$\ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) > 0$$

Finalement :

$$F^{-1} \;:\; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\;\longmapsto\;]0,+\infty[$$
$$y \;\longmapsto\; \ln 2 - \ln\left(1-tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

2016 R

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$p(R_U) = \frac{card(R_u)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

$$p(B_U) = \frac{card(B_u)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$p(B_V/R_U) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

La Question : 2) b)

$$p(B_V/B_U) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$$

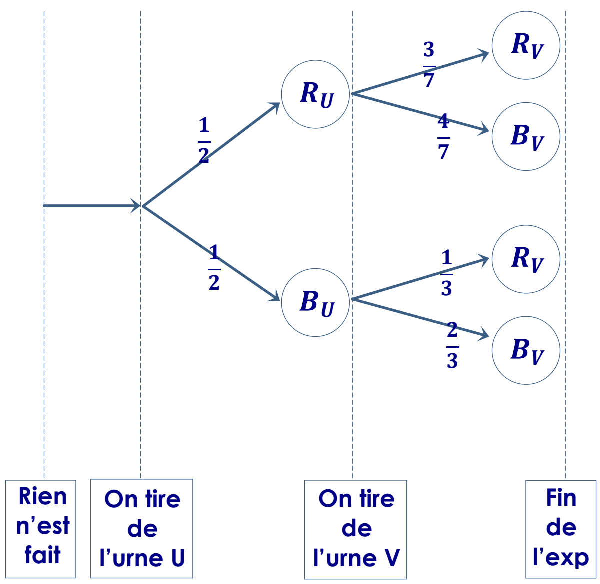
La Question : 3)

$$p(B_V) = p(R_U \cap B_V) + p(B_U \cap B_V)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{13}{21}$$

La Question : 4)

$$p(R_V) = 1 - p(B_V) = \frac{8}{21}$$
$$= p(R_U)\times p(B_V/R_U) + p(B_U)\times p(B_V/B_U)$$

Résumé :



Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$(E,*)$ est un groupe commutatif car :

- $*$ est une loi de composition interne dans E
- $*$ est associative dans E
- $M(0)$ est l'élément neutre dans E
- Le symétrique de $M(z)$ est $M(-z)$ dans E
- $*$ est commutative dans E

Je vous laisse le soin de vérifier ces assertions.

La Question : 2) a)

Il est très facile de montrer, à l'aide d'un simple calcul matriciel, que :
$\forall\ (z,z') \in \mathbb{C}^{2*}\ ;\ \ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

La Question : 2) b)

Montrer tout d'abord que φ est bijective :
(l'équation $\varphi(z) = M(a)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$). Et à partir de l'isomorphisme φ ,
on écrit : $(\mathbb{C}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (E^*,\times)$.
le groupe $(E^*,\times)$ hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme φ.

La Question : 3)

$(E,*,\times)$ Est un corps commutatif car :

- $(E,*)$ Est un groupe d'élément neutre $M(0)$.
- $(E\backslash\{M(0)\},\times)$ Est un groupe.
- $\times$ Est distributive par rapport à $*$
- $\times$ Est commutatif dans E.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

A l'aide d'un simple calcul, que j'ai fait dans mon brouillon, On montre facilement que :
$\Delta = \left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$

La Question : 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \left[4\,;\dfrac{\pi}{3}\right] \\ z_2 = \left[4\,;\dfrac{\pi}{6}\right] \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$(D) : z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow\ (D) :\ (x+iy) = \left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)$$

$$\Leftrightarrow\ (D) :\ \sqrt{3}y - x = 0$$

La Question : 2) b)

Tout d'abord, vous devez montrer que $b^2 = 2a$ et $\frac{2b}{a} = \bar{b}$ à l'aide d'un simple calcul sur des nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + i$.
En suite :

$$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2a}{(a\bar{z}-2b)(z-b)}$$

$$= \left(\frac{a}{a\bar{z}-2\bar{b}}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)$$

$$= \frac{2}{\overline{(z-b)}\cdot(z-b)}$$

$$= \frac{2}{|z-b|^2}$$

La Question : 2) c)

$$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{z'-b}\right)\left(\frac{b}{z-b}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0-b}{z'-b}\right) \times \left(\frac{0-b}{z-b}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\left(\frac{0-b}{z'-b}\right) \times \left(\frac{0-b}{z-b}\right)\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) + \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_M - z_B}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_O - z_B}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{BM'}\,;\,\overrightarrow{BO}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BO}\,;\,\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ (BO)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{BM'}\right)$$

$$\Rightarrow\ (D)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{BM'}\right)$$
$$car\ \ O \in (D)\ \ et\ \ B \in (D)$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}(\mathcal{C}_n)\ admet\ une \\ branche\ parabolique \\ suivant\ l'axe\ des\ abscisses\end{array}$$

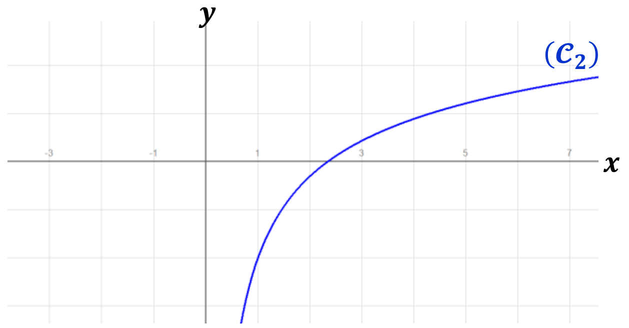
$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}l'axe\ des\ ordonnées \\ est\ une\ asymptote \\ verticale\ pour\ (\mathcal{C}_n)\end{array}$$

La Question : 1) b)

$$\forall\, x > 0\ ;\ f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{n}{x^2} = \frac{x+n}{x^2} > 0$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

La Question : 1) c)



La Question : 2)

f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Donc c'est une bijection de $]0,+\infty[$vers
$f_n(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned}
&f_n :\ ]0,+\infty[\ \longmapsto\ \mathbb{R}\ \ est\ une\ bijection \\
\Longrightarrow\ &(\forall y \epsilon \mathbb{R})(\exists!\, x\ \epsilon\ \mathbb{R})\ ;\ f_n(x) = y \\
\Longrightarrow\ &(pour\ y = 0\ \epsilon\ \mathbb{R})(\exists!\, \alpha_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[)\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0 \\
\Longrightarrow\ &(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)(\exists!\, \alpha_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[)\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0
\end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-1}{x} < 0\ ;\ \forall\, x\ \epsilon\ ]0,+\infty[$$

$$\Longrightarrow\ \ \forall\, x > 0\ ;\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) &= 0 - f_{n+1}(\alpha_n) \\
&= -\ln(\alpha_n) + \frac{n+1}{\alpha_n} \\
&= -\ln(\alpha_n) + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \\
&= -\left(\ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n}\right) + \frac{1}{\alpha_n} \\
&= -f_n(\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n} \\
&= -0 + \frac{1}{\alpha_n} \\
&= \frac{1}{\alpha_n} > 0\ ;\ car\ \ \alpha_n > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ & f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) > 0\ ;\ \forall n \geq 1 \\
\Longrightarrow\ & f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n)\quad ;\ \forall n \geq 1 \\
\Longrightarrow\ & f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\big) > f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_n)\big)\quad ;\quad \forall n \geq 1 \\
& \qquad car\ \ f_{n+1}^{-1}\ \ est\ \ croissante \\
\Longrightarrow\ & \alpha_{n+1} > \alpha_n\quad ;\ \ \forall n \geq 1 \\
\Longrightarrow\ & (\alpha_n)_{n\geq 1}\ \ est\ \ une\ \ suite\ \ strictement\ \ croissante
\end{aligned}$$

La Question : 4) a)

On pose $\varphi(x) = \ln x - x$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
φ	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow -\infty$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ \ & (\forall x > 0)\ ;\ \varphi(x) < 0 \\
\Longrightarrow\ \ & (\forall x > 0)\ ;\ \ln x < x
\end{aligned}$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned}
\alpha_n > 0\ \ \Longrightarrow\ & \ln(\alpha_n) < \alpha_n\ ;\ selon\ 4)a) \\
\Longrightarrow\ & \ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} < \alpha_n - \frac{n}{\alpha_n} \\
\Longrightarrow\ & f_n(\alpha_n) < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\
\Longrightarrow\ & 0 < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\
\Longrightarrow\ & \alpha_n^2 - n > 0\ ;\ car\ \ \alpha_n > 0 \\
\Longrightarrow\ & |\alpha_n| > \sqrt{n}\ \ ;\ avec\ \ |\alpha_n| = \alpha_n > 0 \\
\Longrightarrow\ & \alpha_n > \underbrace{\sqrt{n}}_{n\infty \to +\infty}\ \ \Longrightarrow\ \ \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty
\end{aligned}$$

La Question : 5) a)

Utiliser le théorème de la médiane :

$$On\ a\ :\ \left| \begin{array}{l} f_n\ est\ continue\ sur\ [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}] \subset]0,+\infty[\\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ \alpha_n < \alpha_{n+1} \end{array} \right.$$

$$Alors\ :\ \left| \begin{array}{l} \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}] \\ \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx = (\alpha_{n+1}-\alpha_n)f_n(c_n) \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow\ \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}]\ ;\ \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx = f_n(c_n)$$

$$\Longrightarrow\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)(\exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}]\,)\ ;\ I_n = f_n(c_n)$$

La Question : 5) b)

$$c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\,,\alpha_{n+1}]\ \Longrightarrow\ \alpha_n \le c_n \le \alpha_{n+1}$$

$$\Longrightarrow\ f_n(\alpha_n) \le f_n(c_n) \le f_n(\alpha_{n+1})\ ;\ f_n \nearrow$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n+1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le 0 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{0 \le I_n \le \frac{1}{\alpha_{n+1}}}\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N}^*$$

La Question : 5) c)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = \lim_{n\infty}(\alpha_{n+1}) = +\infty\ \Longrightarrow\ \underbrace{0}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow}\ 0} \le I_n \le \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow}\ 0}$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\infty}(I_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ est continue sur $[n,+\infty[\ \subseteq [2,+\infty[$

$\Longrightarrow\ x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ admet des primitives sur $[n,+\infty[$.
En particulier $g_n(x)$

$$\Longrightarrow\ g_n'(x) = \frac{1}{\ln x}\ ;\ \forall x \ge n$$

La Question : 1) b)

$$g_n'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0\ ;\ \forall x \ge n$$

$\Longrightarrow$ g_n est croissante tout au long de $[n,+\infty[$

La Question : 2) a)

On pose $u = t-1$ $\Leftrightarrow$ $\left| \begin{array}{l} du = dt \\ t = u-1 \\ t = n\ \Leftrightarrow\ u = n-1 \\ t = x\ \Leftrightarrow\ u = x-1 \end{array} \right.$

$$\forall\ u \ge 0\ ;\ \ln(1+u) \le u$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\ln(1+u)} \ge \frac{1}{u}$$

$$\Longrightarrow\ \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right)du \ge \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)du$$

$$\Longrightarrow\ g_n(x) \ge \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$$

La Question : 2) b)

$$g_n(x) \ge \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ +\infty}\ \Longrightarrow\ \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$$

La Question : 3) a)

g_n est continue et strictement croissante sur $[n,+\infty[$
$\Longrightarrow$ g_n est une bijection de $[n,+\infty[$
dans $g_n(\,[n,+\infty[\,) = [0,+\infty[$

La Question : 3) b)

$$g_n\ :\ [n,+\infty[\ \longmapsto\ [0,+\infty[\ est\ une\ bijection$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\ y\ \epsilon\ [0,+\infty[\,)(\exists!\ x\ \epsilon\ [n,+\infty[\,)\ ;\ g_n(x) = y$$

$$\Longrightarrow\ (pour\ y = 1\,)(\exists!\ u_n\ \epsilon\ [n,+\infty[\,)\ ;\ g_n(u_n) = 1$$

$$\Longrightarrow\ (\forall n \ge 2)(\exists!\ u_n \ge n\,)\ ;\ \int_n^{u_n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = 1$$

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned} \int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt &= \int_{u_n}^{n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + \int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt \\ &+ \int_{n+1}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt \\ &= -1 + \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + 1 \\ &= \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt \end{aligned}$$

La Question : 4) b)

$$signe\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right) \equiv signe\left(\int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right)$$

$$signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(n+1-n) \; ; \; car \; \left(\frac{1}{\ln t}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow \; signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(1) \equiv \boxed{+}$$

$$\Longrightarrow \; u_{n+1}-u_n > 0 \; ; \; \forall n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \; u_{n+1} > u_n \; ; \; \forall n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \; (u_n)_{n\geq 2} \; est \; une \; suite \; strictement \; croissante.$$

La Question : 4) c)

$$u_n \geq n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$

$$n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

2017 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

E est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(a,b)$ définie dans l'énoncé. La matrice $\mathcal{O}$ est un élément de E car $\mathcal{O} = M(0,0)$ et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E ,

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ (b-d) & -(a-c) & (a-c) \end{pmatrix}$$

$$= M(a-c \; ; \; b-d) \in E \; car \; \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Alors d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que $(E,+)$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E,

$$M(a,b) \top M(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ (ad+bc) & -(ac-bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M(ac-bd \; ; \; ad+bc) \in E \quad (*)$$

$$car \; (ac-bd) \in \mathbb{R} \; et \; (ad+bc) \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\top$ est une loi de composition interne dans E. C'est-à-dire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top)$

La Question : 3) a)

$$\varphi \; : \; (\mathbb{C}^*,\times) \longmapsto (E^*,\top)$$
$$a+ib \longmapsto M(a,b)$$

Soient $(a+ib)$ et $(c+id)$ deux nombres complexes non-nuls :

$$\varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big) = \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$$
$$= M(ac-bd \; ; \; ad+bc)$$
$$= M(a,b) \top M(c,d) \; ; \; selon \; (*)$$

Ainsi φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E^*,\top)$
En plus ; φ est une bijection car l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$ et c'est $(a+ib)$ avec $M(a,b)$ est un élément donné dans E^* . En d'autres termes :
$(\forall \; M(a,b) \in E)(\exists! \, x+iy \in \mathbb{C}^*) \; : \; \varphi(x+iy) = M(a,b)$.
Donc la bijectivité de φ nous assure l'écriture : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

La Question : 3) b)

Comme φ est un homomorphisme et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe ; alors $(\varphi(\mathbb{C}^*),\top)$ est un groupe aussi.
C'est-à-dire que $(E^*,\top)$ est un groupe.
$(1+0i)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{C}^*,\times)$
alors $M(1,0)$ sera l'élément neutre dans $(E^*,\top)$
Remarque 1) : l'homomorphisme des groupes conserve la structure algébrique des groupes.
Remarque 2) : φ est définie de $\mathbb{C}^*$ dans E^* mais pas dans E parce que l'élément $\mathcal{O} = M(0,0)$ n'est pas inversible dans $(E,\top)$.

$$\left| \begin{array}{l} M(0,0) \top M(x,y) = M(0,0) \neq M(1,0) \\ M(x,y) \top M(0,0) = M(0,0) \neq M(1,0) \end{array} \right.$$

La Question : 4) a)

Soient $M(a,b), M(c,d)$ *et* $M(e,f)$ trois éléments de E

$$M(a,b) \top \left(M(c,d)+M(e,f)\right) = M(a,b) \top M(c+e\,;d+f)$$
$$= M\left(a(c+e)-b(d+f)\ ;\ a(d+f)+b(c+e)\right)$$
$$= M(ac+ae-bd-bf\ ;\ ad+af+bc+be)$$
$$Or\ :\ M(a,b) \top M(c,d)+M(a,b) \top M(e,f)$$
$$= M(ac-bd\ ;\ ad+bc)+M(ae-bf\ ;\ af+be)$$
$$= M(ac-bd+ae-bf\ ;\ ad+bc+af+be)$$

Donc $\top$ est distributive par rapport à $+$ à gauche.
La distributivité à droite est déduite via la commutativité de $\top$ dans E.
Finalement : $\top$ est distributive par rapport à $+$.

La Question : 4) b)

D'après les résultats trouvés ci-dessus on écrit :

$$\begin{cases} (E,+)\ est\ 1\ groupe\ commutatif\ d'élément\ neutre\ M(0,0) \\ (E\backslash\{M(0,0)\}\,;\top)\ est\ un\ groupe \\ \top\ est\ distributive\ par\ rapport\ à\ + \end{cases}$$

Donc d'après la caractérisation des corps on en déduit que $(E,+,\top)$ est un corps. De plus $\top$ est commutative dans $\top$. Alors $(E,+,\top)$ est un corps commutatif .

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\Delta = 4(m+1+i)^2-8(m^2+m(1+i)+i)$$
$$= 4(m^2+2m(1+i)+(1+i)^2)-8(m^2+m(1+i)+i)$$
$$= 4m^2+8m(1+i)+4(2i)-8m^2-8m(1+i)-8i$$
$$= -4m^2$$
$$= (2im)^2$$

La Question : I) 2)

$$z_1 = \frac{2(m+1+i)+2im}{4} = \frac{(m+1)(i+1)}{2}$$
$$z_2 = \frac{2(m+1+i)-2im}{4} = \frac{(m+i)(1-i)}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$i\,z_2+1 = \frac{i(m+i)(1-i)}{2}+\frac{2}{2} = \frac{i(m-mi+i+1)+2}{2}$$
$$= \frac{im+m-1+i+2}{2} = \frac{im+m+1+i}{2}$$
$$= \frac{(m+1)(i+1)}{2} = z_1$$

La Question : II) 1) b)

$$On\ a\ :\ \frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega} = \frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}$$
$$= \left(\frac{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}\right)$$
$$= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-(1+i)}$$
$$= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-i(1-i)}$$
$$= \frac{(1+i)(m)}{(1-i)(m)}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2} = i$$
$$= e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Ainsi : $\frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega} = e^{\frac{i\pi}{2}}$.

c'est-à-dire : $(z_{M_1}-\omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_{M_2}-\omega)$.
c-à-d que M_1 est l'image de M_2 via la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. ie :

$$R_{\frac{\pi}{2}}(\Omega)\ :\ (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M_2(z_2) \longmapsto M_1(z_1)$$

La Question : II) 2) a)

$$On\ a\ :\ \frac{z_{M_2}-m}{z_{M_1}-m} = \frac{z_2-m}{z_1-m}$$
$$= \left(\frac{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{2m}{2}}{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{2m}{2}}\right)$$
$$= \frac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m}$$
$$= \frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m}$$
$$= \frac{-m-im+1+i}{im-m+1+i}$$
$$= \frac{-m(1+i)+1(1+i)}{m(i-1)-i(i-1)}$$
$$= \frac{(1+i)(-m+1)}{(i-1)(m-i)}$$
$$= \left(\frac{-1-i}{i-1}\right)\left(\frac{m-1}{m-i}\right) = i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$$

La Question : II) 2) b)

On part du fait que les points M, M_1 *et* M_2 sont colinéaires

$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \overrightarrow{MM_2} = k \cdot \overrightarrow{MM_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ (z_{M_2} - z_M) = k \cdot (z_{M_1} - z_M)$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M}\right) = k \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(i\left(\frac{x+iy-1}{x+iy-i}\right)\right) = 0\ ;\ m = x+iy$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{ix-y-i}{x+i(y-1)}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{(ix-y-i)(x-iy-i)}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{ix^2+xy-x-xy+iy^2-iy-ix-y+1}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2+y^2-y-x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = 0$$

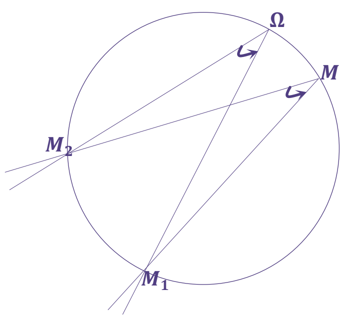
$$\Longrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad |MI|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |MI|^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I = milieu[AB]$$

La Question : II) 2) c)



Les 4 points sont circulaires si : premièrement M n'appartient pas au cercle (Γ) et deuxièmement si $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2},\overrightarrow{\Omega M_1}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}}\right)\ [\pi]$.

$$\Longrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)[\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right) - \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \arg\left[\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right):\left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)\right] \equiv 0\ [\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}\right):\left(\frac{z_1-m}{z_2-m}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad (i):\left(\frac{i(m-1)}{m-i}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{m-i}{m-1}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{m-i}{m-1}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{x+iy-i}{x+iy-1}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{(x+iy-i)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2-ix+i-y}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -y-x+1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x+y = 1$$

$$\Longrightarrow \quad M \in (\Delta) : x+y = 1$$

Cherchons maintenant les points d'intersection entre (Γ) et (Δ) en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-x+1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ou\ bien\ \ x = 0\ \Longrightarrow y = 1 \\ ou\ bien\ \ x = 1\ \Longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\Delta) \cap (\Gamma) = \{\,(0,1)\ ;\ (1,0)\,\}$$

Finalement : l'ensemble $\tilde{E}$ des points M pour que Ω, M, M_1 *et* M_2 soient circulaires est la droite $(\Delta) : x+y = 1$ privée des points (1,0) et (0,1) .
Autrement-dit : $\tilde{E} = (\Delta)\backslash\{(0,1)\ ;\ (1,0)\} = (\Delta)\backslash\{B;A\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On considère dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation suivante :
soit (x,y) une solution.
On a : $px + y^{p-1} - p = p(x-1) + y^{p-1}$

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Longrightarrow x \geq 1 \quad et \quad y > 0 \\ &\Longrightarrow (x-1) \geq 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Longrightarrow p(x-1) \geq 0 \quad et \quad y^{p-1} > 0 \quad car\ p \geq 5 \\ &\Longrightarrow p(x-1) + y^{p-1} > 0 \\ &\Longrightarrow px + y^{p-1} - p > 0 \\ &\Longrightarrow px + y^{p-1} > p \\ &\Longrightarrow 2017 > p\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Par l'absurde, on suppose que p divise y.
Alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*)$; $y = kp$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow px + (kp)^{p-1} = 2017 \\ &\Longrightarrow px + k^{p-1}p^{p-1} = 2017 \\ &\Longrightarrow px + (k^{p-1}p^{p-2}p) = 2017 \\ &\Longrightarrow p(x + k^{p-1}p^{p-2}) = 2017 \\ &\Longrightarrow p/2017\ ; \ avec \begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ 5 \leq p < 2017 \end{cases} \\ &\Longrightarrow p/2017\ ; \ avec \begin{cases} p \neq 1 \\ p \neq 2017 \end{cases} \\ &\Longrightarrow absurde \\ &\Longrightarrow p\ ne\ divise\ pas\ y\end{aligned}$$

Remarque : on peut aisément montrer que $(x + k^{p-1}p^{p-2}) \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ et $k > 0$ et $p \geq 5$.

La Question : 1) c)

C'est le moment idéal pour faire appel au petit théorème de Fermat.

Rappel : $\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On a : $p \wedge y = 1$, car p ne divise pas y donc $y \neq p$.
Donc d'après le petit théorème de Fermat , on écrit : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. Si $y = 1$ alors ça marche aussi.
On a $px + y^{p-1} = 2017$
c-à-d : $px + (y^{p-1} - 1) = 2016$.
comme $\left| \begin{array}{l} p/px \\ p/(y^{p-1} - 1) \end{array} \right.$ alors $p/(px + y^{p-1} - 1)$
D'où : $p/2016$

La Question : 1) d)

$$\begin{aligned}p/2016 &\Longrightarrow p/(2^5 \times 3^2 \times 7) \\ &\Longrightarrow p \in \{2\,;3\,;7\} \\ &\Longrightarrow p \in \{7\}\ ; \ car\ p \geq 5 \\ &\Longrightarrow p = 7\end{aligned}$$

La Question : 2)

On a d'après les résultats de la question 1) :
si (x,y) est solution de $px + y^{p-1} = 2017$.
Alors p=7 , Donc il est clair que si $p \neq 7$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^{2*}$.
Ainsi l'équation devient :
$7x + y^6 = 2017$; $(x,y) \in \mathbb{N}^{2*}$

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Longrightarrow x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Longrightarrow 7x > 0 \quad et \quad y > 0 \\ &\Longrightarrow 0 < 2017 - 7x < 2017 \\ &\Longrightarrow 0 < y^6 < 2017 \\ &\Longrightarrow 0 < y < 2017^{\frac{1}{6}} \\ &\Longrightarrow 0 < y < 3{,}55 \\ &\Longrightarrow y \in \{1\,;2\,;3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 1 &\Longrightarrow 7x + 1 = 2017 \\ &\Longrightarrow x = \frac{2016}{7} = 288\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 2 &\Longrightarrow 7x + 2^6 = 2017 \\ &\Longrightarrow x = \frac{2017 - 2^6}{7} = 279\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 3 &\Longrightarrow 7x + 3^6 = 2017 \\ &\Longrightarrow x = \frac{2017 - 3^6}{7} = 184\end{aligned}$$

Inversement : On vérifie aisément que les couples (288,1) , (279,2) et (184,3) vérifient-bien l'équation $7x + y^6 = 2017$. Finalement : l'ensemble des solutions de cet équation est défini explicitement par : $\mathcal{S} = \{(288,1)\,;\,(279,2)\,;\,(184,3)\}$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}}(1-t)e^{t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(e^t - te^t)$$
$$= 0^+ - 0^- = 0$$
$$= f(0)$$

Ainsi : f est continue en 0 à droite

La Question : I) 1) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$
$$= \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}} -t(1-t)e^{t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t + t^2e^t)$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t) + \lim_{t\to-\infty} 4\left(\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}\right)^2$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^t) + 4\lim_{\substack{\mu\to-\infty\\ \mu=\frac{t}{2}}}(\mu e^{\mu})^2$$
$$= -0^- + 4(0^-)^2 = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

La Question : I) 1) c)

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
alors $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$.
comme $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto e^x$
et aussi dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$; $e^{\frac{-1}{x}} > 0$
Alors $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivables sur $]0,+\infty[$.
comme $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
et comme $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors le produit est dérivable aussi sur $]0,+\infty[$.
ainsi $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{-1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$$

La Question : I) 2) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$
$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=\frac{1}{x}}}(1+t)e^{-t}$$
$$= (1+0)e^0 = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 2) b)

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$ alors $\forall x > 0$; $f'(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

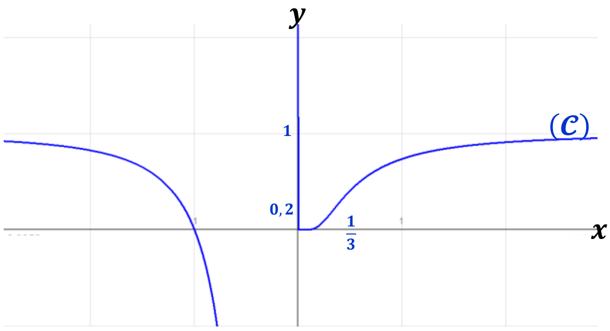
La Question : I) 3) a)

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}\right)' = \left(\frac{-3x^2}{x^6}\right)e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$= \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \iff \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right) = 0 \;;\; car\ e^{\frac{-1}{x}} > 0$$
$$\iff -3x^5 + x^4 = 0$$
$$\iff x^4(1-3x) = 0$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x = 0 \\ oubien\ (1-3x) = 0 \end{cases}$$
$$\iff (1-3x) = 0 \;;\; car\ x > 0$$
$$\iff (1-3x) = 0 \;;\; car\ x > 0$$
$$\iff x = \frac{1}{3}$$

Donc le point $\left(\frac{1}{3}\,;0{,}2\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

La Question : I) 3) b)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.
alors f admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en a telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I \;;\; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;;\; \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I \;;\; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

Dans cet exercice, f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ telle que $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[\;;\; \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$
et φ est dérivable sur $]0,+\infty[$; $\varphi'(x) = f(x)$.
Donc F est continue sur $]0,+\infty[$.

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt &= \int_x^1 \left(\underbrace{1}_{u'(t)}\right)\cdot\left(\underbrace{e^{\frac{-1}{t}}}_{v(t)}\right) dt \\ &= \left[t\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 t\cdot\left(\frac{-1}{t}\right)'\cdot e^{\frac{-1}{t}}\,dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(t\cdot\frac{1}{t^2}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}} dt &= \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad x > 0 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) c)

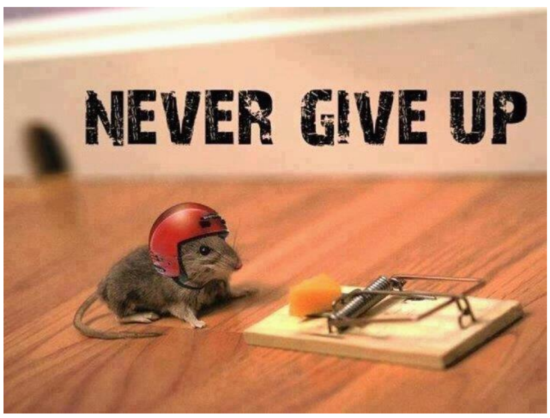
il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' &= 1\cdot e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)'\cdot x = e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2}\cdot x\cdot e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Donc\ :\ \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{x+1}\,f(x)\right)' dx \\ &= \left[\frac{x^2}{x+1}\,f(x)\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{1+1}\,f(1)\right) - \left(\frac{0^2}{0+1}\,f(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}f(1) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1} \end{aligned}$$

La Question : II) 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int_0^2 |f(t)|\,dt &= \int_0^2 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt - \int_2^1 f(t)\,dt \\ &= e^{-1} - \left(e^{-1} - 2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) \\ &= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right)\ \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \\ &= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right)\ (2\ cm)\times(2\ cm) \\ &= \left(8\,e^{\frac{-1}{2}}\right)\ cm^2 \end{aligned}$$



La Question : II) 4) a)

La fonction f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \epsilon]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ qui s'annule en 1 définie comme suit :

$\left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

on obtient : $\left| \begin{array}{l} \varphi \text{ est continue sur } [n\,,n+2] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]n\,,n+2[\end{array} \right.$.

Ainsi d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ sur $[n\,,n+2]$ on écrit :

$\forall n \geq 0\ ;\ \exists v_n \epsilon]n\,,n+2[\ ;\ \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n)}{(n+2)-n} = \varphi'(v_n)$

c-à-d : $F(n) - F(n+2) = 2f(v_n)$.

c-à-d : $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

Finalement :

$\forall n \geq 0\ ;\ \exists v_n \epsilon]n\,,n+2[\ ;\ u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

La Question : II) 4) b)

On a prouvé, dans la première partie , la croissance de la fonction f sur $]0,+\infty[$. soit $n \epsilon \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow\ \exists\, v_n \epsilon]n\,,n+2[\ ;\ u_n = f(v_n)$$

$$n < v_n < n+2 \ \Rightarrow\ f(n) < f(v_n) < f(n+2)\ \ car\ f \nearrow$$

$$\Rightarrow\ 2f(n) < 2f(v_n) < 2f(n+2)$$

$$\Rightarrow\ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$$

La Question : II) 4) c)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} = 2(1+0)e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}} = 2(1+0)e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} < u_n < \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

$$Finalement\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Soit ψ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. il est clair que ψ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$car\ x > y\ \Rightarrow\ \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow\ \frac{-1}{x} > \frac{-1}{y}$$

$$\Rightarrow\ e^{\frac{-1}{x}} > e^{\frac{-1}{y}}$$

$$\Rightarrow\ \psi(x) > \psi(y)$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\psi(\,]0,+\infty[\,)$.

$$\psi(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to 0^+}\psi(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\psi(x)\right[=]0,1[$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$.

$$\begin{array}{rcl} \psi\ :\ ]0,+\infty[& \longmapsto &]0,1[\\ x & \longmapsto & \psi(x) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\, y\, \epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\, x\, \epsilon\,]0,+\infty[\,)\ :\ \psi(x) = y$$

$$ou\ \ (\forall\, x\, \epsilon\,]0,+\infty[\,), (\exists!\ y\, \epsilon\,]0,1[\,)\ :\ \psi(x) = y$$

$$joliment\ \ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*\,), (\exists!\ \beta_n\, \epsilon\,]0,1[\,)\ :\ \psi(n) = \beta_n$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*\,), (\exists!\ \beta_n\, \epsilon\,]0,1[\,)\ :\ e^{\frac{-1}{n}} = \beta_n\quad (*)$$

La fonction f est aussi une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$ car elle est continue et elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ ]0,+\infty[& \longmapsto &]0,1[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$c-à-d:\ \ (\forall\, y\, \epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\ x\, \epsilon\,]0,+\infty[\,)\ :\ y = f(x)$$

$$(pour\ \beta_n\, \epsilon\,]0,1[\,), (\exists!\ \alpha_n\, \epsilon\,]0,+\infty[\,)\ :\ \beta_n = f(\alpha_n)\ (**)$$

De $(*)\ et\ (**)$ on conclut :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*), (\exists!\ \alpha_n > 0)\ :\ f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$$

La Question : III) 1) b)

Soit $n\, \epsilon\, \mathbb{N}^*$ c-à-d $n \geq 1$

$$n+1 > n\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\ ;\ passage\ à\ l'inverse$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n}\ ;\ passage\ à\ l'opposé$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\frac{-1}{n+1}} > e^{\frac{-1}{n}}\ ;\ Exp\ est\ \nearrow\ et\ bijection$$

$$\Leftrightarrow\ f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)\ ;\ d'après\ 1)a)$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_{n+1} > \alpha_n\ ;\ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

$$\Leftrightarrow\ (\alpha_n)_{n\geq 1}\ \ est\ une\ suite\ \nearrow$$

La Question : III) 1) c)

$$f(\alpha_n)=e^{\frac{-1}{n}} \iff \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}=e^{\frac{-1}{n}}$$
$$\iff \ln\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right)=\ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)+\ln\left(e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right)=\ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)-\frac{1}{\alpha_n}=\frac{-1}{n}$$

La Question : III) 2) a)

D'une part, On a :

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)-(1-t)=\frac{1-(1^2-t^2)}{1+t}=\frac{t^2}{1+t}$$

(pour $t\geq 0$) ; $t^2\geq 0\ et\ (1+t)>0$

Donc : $\frac{t^2}{1+t}\geq 0$ D'où : $\left(\frac{1}{1+t}\right)-(1-t)\geq 0$

c-à-d : $\left(\frac{1}{1+t}\right)\geq (1-t) \rightsquigarrow (1)$

$$(1-t+t^2)-\left(\frac{1}{1+t}\right)=\frac{(1+t)(1-t+t^2)-1}{1+t}$$
$$=\frac{t^3}{1+t}$$

(pour $t\geq 0$) ; $t^3\geq 0$ et $(1+t)>0$

Donc : $\frac{t^3}{1+t}\geq 0$

D'où : $(1-t+t^2)-\left(\frac{1}{1+t}\right)\geq 0$

Ainsi : $(1-t+t^2)\geq\left(\frac{1}{1+t}\right) \rightsquigarrow (2)$

$$(1)\ et\ (2) \iff \boxed{1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2}\ (\forall t\geq 0)$$

La Question : III) 2) b)

Soit $x\geq 0$, $(1-x)\leq\left(\frac{1}{1+x}\right)\leq(1-x+x^2)$

$$\iff -x\leq\left(\frac{1}{1+x}\right)-1\leq -x+x^2$$
$$\iff \int(-1)\,dx\leq\int\left(\frac{1}{1+x}-1\right)dx\leq\int(-x+x^2)\,dx$$

Car la continuité est vérifiée.

$$\iff \frac{-x^2}{2}\leq -x+\ln|1+x|\leq\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
$$\iff \frac{-x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

La Question : III) 3) a)

$$e^{\frac{3}{4}}\geq 2 \iff e^1\cdot e^{\frac{-1}{4}}\geq 2$$
$$\iff e^{\frac{-1}{4}}\geq 2\,e^{-1}$$
$$\iff f(\alpha_4)\geq f(1)\ ;\ car \left|\begin{array}{l} f(\alpha_4)=e^{\frac{-1}{4}} \\ f(1)=2\,e^{-1}\end{array}\right.$$
$$\iff \alpha_4\geq 1\ ;\ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

On considère la proposition suivante :

$$P(n)\ :\ \alpha_n\geq 1$$

Pour $n=4$, on a $\alpha_4\geq 1$. Donc $P(n)$ est vérifiée.
Soit $n\geq 4$ et on suppose que $\alpha_n\geq 1$.
Comme $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante,
Alors $\alpha_{n+1}\geq\alpha_n\geq 1$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.
Ainsi : $\left|\begin{array}{l} P(4)\ est\ vraie \\ P(n)\Rightarrow P(n+1)\ ;\ \forall n\geq 4\end{array}\right.$.
D'où : $\forall n\geq 4\ :\ \alpha_n\geq 1$.

La Question : III) 3) b)

On a d'après la question 1)c) :

$$\frac{-1}{\alpha_n}+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{-1}{n}$$
$$\iff \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{n} \rightsquigarrow (\star)$$

D'autre part : $\alpha_n\geq 1 \iff \frac{1}{\alpha_n}\geq 1>0$

$$\iff \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2\leq -\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$\leq\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^3$$

Et ceci d'après 2)b) :

$$\iff \frac{-1}{2\alpha_n^2}\leq\frac{-1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{n}\leq\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}\ ;\ selon\ (\star)$$
$$\iff \frac{-1}{2\alpha_n^2}\leq\frac{-1}{n}\leq\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}$$
$$\iff -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}\right)\leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{n}\right)\leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}\right)$$
$$\iff 1-\frac{2}{3\alpha_n}\leq\frac{2\,\alpha_n}{n}\leq 1$$

La Question : III) 3) c)

$$\alpha_n \geq 1 \implies \frac{1}{\alpha_n} \leq 1 \implies \frac{-2}{3\alpha_n} \geq \frac{-2}{3}$$
$$\implies \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq 1 - \frac{2}{3}$$
$$\implies \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq \frac{1}{3}$$
$$\implies \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \quad ; \; d'après\ 3)b)$$
$$\implies \frac{1}{3} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$$
$$\implies \frac{n}{6} \leq \alpha_n^2 \leq \frac{n}{2} \; ; \; car\ n \geq 4 > 0$$
$$\implies \sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$$
$$\implies \underbrace{\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} +\infty} \leq \alpha_n$$
$$\implies \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$

La Question : III) 3) d)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$
$$\implies \lim_{n\infty}\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) = 1 - \frac{2}{3(+\infty)} = 1 - 0 = 1$$
$$\implies \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq \underbrace{1}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}$$
$$\implies \lim_{n\infty}\left(\frac{2\alpha_n^2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\infty}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\infty}\sqrt{\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\infty}\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

Khmiset

Le Premier Exercice

La Question : 1)

La loi de composition interne :

Soient a et b deux éléments de G :

$$(a,b) \in G^2 \implies \begin{cases} 0 \leq a < 1 \\ 0 \leq b < 1 \end{cases}$$
$$\implies 0 \leq (a+b) < 2$$
$$\implies E(a+b) \in \{0;1\}$$
$$\implies \begin{cases} 0 \leq (a+b) \leq 1 \ si\ E(a+b) = 0 \\ 1 \leq (a+b) < 2 \ si\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} 0 \leq (a+b) - 0 < 1 \ avec\ E(a+b) = 0 \\ 0 \leq (a+b) - 1 < 1 \ avec\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} 0 \leq (a+b) - E(a+b) < 1 \ avec\ E(a+b) = 0 \\ 0 \leq (a+b) - E(a+b) < 1 \ avec\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$
$$\implies a * b \in G$$

Deuxième méthode :

Rappel : $\begin{cases} (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) \; : \; E(m+x) = m + E(x) \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \; : \; E(x) \in \mathbb{Z} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \; : \; E(x) = 0 \iff 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Soient a et b deux éléments de G :

$$\implies a * b = (a+b) - E(a+b)$$
$$\implies E(a*b) = E\big((a+b) - E(a+b)\big)$$
$$\implies E(a*b) = E(a+b) - E(a+b)$$
$$\implies E(a*b) = 0$$
$$\implies 0 \leq a*b < 1$$
$$\implies a*b \in [0,1[= G$$
$$\implies a*b \in G$$

La conclusion : $\forall (a,b) \in G^2 \; ; \; a*b \in G$

Donc $*$ est une loi de composition interne dans G.

La Question : 2)

La loi $*$ est commutative dans G puisque :

$$\begin{aligned}\forall\,(a,b)\in G^2\ ;\ a*b &= a+b-E(a+b)\\ &= b+a-E(b+a)\\ &= b*a\end{aligned}$$

Pour l'associativité, on considère trois éléments a, b et c dans G. D'une part on a :

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a*b)+c-E(a*b+c)\\ &= (a+b-E(a+b))+c-E(a+b-E(a+b+c))\\ &= (a+b+c)-E(a+b)-E(a+b+c-E(a+b))\\ &= (a+b+c)-E(a+b)-E(a+b+c)+E(a+b)\\ &= (a+b+c)-E(a+b+c)\ \rightsquigarrow\ (1)\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a+(b*c)-E(a+b*c)\\ &= \big(a+b+c-E(b+c)\big)-E\big(a+b+c-E(b+c)\big)\\ &= (a+b+c)-E(b+c)-E(a+b+c)+E(b+c)\\ &= (a+b+c)-E(a+b+c)\ \rightsquigarrow\ (2)\end{aligned}$$

A partir des résultats (1) et (2), on remarque que $(a*b)*c=a*(b*c)$. ce qui veut dire que $*$ est associative. Attention à ne pas utiliser l'égalité $E(x+y)=E(x)+E(y)$ car elle est conditionnée, ce qui monte qu'elle n'est pas toujours vérifiée.

La Question : 3)

Soit ε l'élément neutre de la loi $*$ dans G .
On écrit alors : $a*\varepsilon=\varepsilon*a=a\ ;\ \forall a\epsilon G$.

$$\begin{aligned}a*\varepsilon=a &\Leftrightarrow a+\varepsilon-E(a+\varepsilon)=a\\ &\Leftrightarrow E(a+\varepsilon)=\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \varepsilon=\begin{cases}oubien\ 0\\ oubien\ 1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \varepsilon=0\ \ car\ \ 0\,\epsilon\,[0,1[\,=G\end{aligned}$$

D'où l'élément neutre de la loi * dans G est le nombre 0 .

La Question : 4)

Etudions maintenant la symétrie des éléments de G. Soit a un élément de G et soit a' son symétrique dans G.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a*a'=0\\ &\Rightarrow a*a'-E(a+a')=0\\ &\Rightarrow a*a'=E(a+a')\\ &\Rightarrow a*a'=E(a+a')=\begin{cases}oubien\ 0\\ oubien\ 1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}oubien\ \ a+a'=0\\ oubien\ \ a+a'=1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}oubien\ \ a'=-a\\ oubien\ \ a'=1-a\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}oubien\ \ a'=(-a)\,\epsilon\,]-1\,;0]\\ oubien\ \ a'=(1-a)\,\epsilon\,[0\,;1[\end{cases}\\ &\Rightarrow a'=(1-a)\,\epsilon\,[0\,;1[\,=G\end{aligned}$$

La conclusion :

$$(\forall a\epsilon G)(\exists!\,a'=(1-a)\,\epsilon\,G)\ :\ a*a'=a'*a=0$$

La Question : 5)

Soit à résoudre dans G^n l'équation suivante :

$$\underbrace{x*x*\cdots*x}_{\substack{n\,fois\\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}\\ n\geq 2}}=\frac{1}{n}$$

Tout d'abord, remarquez que $x*x=2x-E(x)$.

$$\begin{aligned}x^{(3)} &= x*x*x=x*(2x-E(x))\\ &= x+2x-E(2x)-E(x+2x-E(2x))\\ &= 3x-E(2x)-E(3x)+E(2x)\\ &= 3x-E(3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{(4)} &= 4x-E(4x)\\ x^{(5)} &= 5x-E(5x)\\ &\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\end{aligned}$$

$$x^{(n)}=nx-E(nx)\ ;\ \text{à}\ vérifier\ par\ récurrence\ !$$

$$(\forall n\geq 2)\ \ soit\ \ (Q_n)\ :\ x^{(n)}=nx-E(nx)$$

$$avec\ :\ \ x^{(n)}=\underbrace{x*x*x*\cdots*x}_{n\,fois}$$

$$pour\ \ n=2,\qquad on\ a\ \ :\ x*x=2x-E(2x)$$

Donc (Q_2) est vérifiée . soit $n\,\epsilon\,\mathbb{N}$ fixé tel que $n\geq 2$ et on suppose que (Q_n) est vraie .

$$\begin{aligned}(Q_n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ x^{(n)}=nx-E(nx)\\ &\Rightarrow\ x^{(n+1)}=x*x^{(n)}=x*(nx-E(nx))\\ &\Rightarrow\ x^{(n+1)}=x+nx-E(nx)-E(x+nx-E(nx))\\ &\Rightarrow\ x^{(n+1)}=(n+1)x-E(nx)-E(x+nx)+E(nx)\\ &\Rightarrow\ x^{(n+1)}=(n+1)x-E\big((n+1)x\big)\\ &\Rightarrow\ (Q)_{n+1}\ \ est\ \ vraie\end{aligned}$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases}(Q_2)\ \ est\ \ vraie\\ (Q_n)\ \Rightarrow\ (Q_{n+1})\ ;\ \forall n\geq 2\end{cases}$$

D'où $(\forall n\geq 2)\ ;\ x^{(n)}=nx-E(nx)\ \rightsquigarrow\ (\star)$

A l'aide de $(\star)$ on résout aisément l'équation

$$x^{(n)}=\frac{1}{n}\ ;\ \left|\begin{array}{l}x\,\epsilon\,G\\ n\geq 2\,,n\epsilon\mathbb{N}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}x^{(n)}=\frac{1}{n}\ &\Leftrightarrow\ nx-E(nx)=\frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow\ nx-\frac{1}{n}=E(nx)\end{aligned}$$

$$n \geq 2 \iff E(nx) \in \{0,1,2,\cdots,(n-1)\}$$

$$\iff \left(nx - \frac{1}{n}\right) \in \{0,1,2,\cdots,(n-1)\}$$

$$\iff nx \in \left\{\frac{1}{n} ; \frac{n+1}{n} ; \frac{2n+1}{n} ; \cdots ; \frac{n(n-1)+1}{n}\right\}$$

$$\iff x \in \left\{\frac{1}{n^2} ; \frac{n+1}{n^2} ; \frac{2n+1}{n^2} ; \cdots ; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette équation est défini explicitement par :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{n^2} ; \frac{n+1}{n^2} ; \frac{2n+1}{n^2} ; \cdots ; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

Par exemple : l'équation $x^{(9)} = \frac{1}{9}$ admet exactement neuf solutions dans $[0,1[$, les voici :

$$\mathcal{S}_9 = \left\{\frac{1}{81}, \frac{10}{81}, \frac{19}{81}, \frac{28}{81}, \frac{37}{81}, \frac{46}{81}, \frac{55}{81}, \frac{64}{81}, \frac{73}{81}\right\}$$

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{array}{c} Rappel \\ Formules \\ D'Euler \end{array} : \left| \begin{array}{l} \cos(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$On\ a :\ \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$$

$$\iff \quad 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= \frac{2i}{2i}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y-x-y}{2}\right)}$$

$$= e^{ix} - e^{iy}$$

De même : $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$

$$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{2}{2}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-x+y+x+y}{2}\right)}$$

$$= e^{ix} + e^{iy}$$

La Question : I) 2)

Résolution de l'équation (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta = (-2i)^2 + 4\left(1 + e^{2i\theta}\right)$$

$$= -4 + 4 + 4e^{2i\theta}$$

$$= \left(2e^{i\theta}\right)^2$$

$$z_1 = \frac{2i - 2e^{i\theta}}{2} = i - e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{i\theta}$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)}$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z_2 = \frac{2i + 2e^{i\theta}}{2} = i + e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\theta}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

La Question : I) 3)

Rappel : $\left| \begin{array}{l} A, B\ et\ C\ sont \\ colinéaires \end{array} \right. \iff \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv 0[\pi]$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \frac{2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right) \equiv \arg\left(i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(i) + \arg\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + 0\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \not\equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A, B\ et\ C\ ne\ sont \\ pas\ \ colinéaires \end{array} \right.$$

OAB Est un triangle rectangle :

On a : $OA = |z_A - z_O| = |z_A| = \left|2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$

$$= |i| \times 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \quad ; \quad la\ valeur\ absolue$$

$$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| \ ; \ la\ valeur\ absolue$$

$$AB = |z_B - z_A|$$
$$= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} - 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2e^{i\theta}\right| = 2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + \left|cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + \left|cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + 4\left|cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(2\left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)^2 + \left(2\left|cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)^2 = 2^2$$
$$\Leftrightarrow \quad OA^2 + OB^2 = AB^2$$

D'après le théorème de Pythagore , on conclut que OAB est un triangle rectangle en O .
Pour que OAB soit isocèle, il suffit qu'il vérifie $OA = OB$

$$OA = OB \quad \Leftrightarrow \quad \left|sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right| = 1 \ ; \ avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1 \ ; \ avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \ ; \ avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ oubien\ :\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \\ oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}[\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \\ oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{-\pi}{4} + k'\pi \ ; \ k'\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \theta = -2k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \\ oubien\ :\ \theta = \pi - 2k'\pi \ ; \ k'\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \theta \equiv 0[2\pi] \\ oubien\ :\ \theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0[\pi]$$

Donc OAB est isocèle Si $\theta \equiv 0[\pi]$.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

La rotation r est définie par :

$$r\left(A,\frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_A) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_M - z_A)$$
$$\Leftrightarrow (z' - a) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - a)$$
$$\Leftrightarrow z' = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - a) + a$$
$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a$$

Ainsi la rotation r sera définie par :

$$r\left(A,\frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longmapsto M'\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a\right)$$

$$r(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z_B - a) + a$$
$$\Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(b + i - a) + a$$
$$\Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{b + a - \sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}a}{2}\right)$$

La Question : II) 2)

$$B' \epsilon (OY) \Leftrightarrow z_{B'} \epsilon\ i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \Re e(z_{B'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b + a - \sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow a + b = \sqrt{3}$$

Dans ce cas On retrouve :

$$z_{B'}=\left(\frac{b+a-\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2}\right)$$
$$=i\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2}\right)\in i\mathbb{R}$$

La Question : II) 3) a)

$$le\ cas\ :\ \left|\begin{array}{l}A(\sqrt{3})\\ B(i)\\ C(-i)\\ D\left(2+\sqrt{3}(1-2i)\right)\end{array}\right.$$

Pour le triangle ABC on a :

$$\left|\begin{array}{l}AB=|i-\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2\\ AC=|-i-\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2\\ BC=|-i-i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2\end{array}\right.$$

Donc ABC est un triangle équilatéral.

Pour le triangle ACD on a :

$$\left|\begin{array}{l}AC=|-i-\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2\\ AD=|2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4\\ DC=|-i-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i|=\sqrt{(-2-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{20}\end{array}\right.$$

On remarque que $2^2+4^2=(\sqrt{20})^2$

c-à-d que : $AC^2+AD^2=DC^2$

c-à-d que le triangle ACD est un triangle rectangle.

La Question : II) 3) b)

Soit T la translation définie par :

$$T\ :\ \begin{array}{rcl}(\mathcal{P})&\longmapsto&(\mathcal{P})\\ M(z)&\longmapsto&M'(z')\end{array}$$

Et Soit r la rotation définie par :

$$r\ :\ \begin{array}{rcl}(\mathcal{P})&\longmapsto&(\mathcal{P})\\ M(z)&\longmapsto&M'\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}T(D)=F&\Leftrightarrow\ \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow\ (z_F-z_D)=(z_C-z_A)\\ &\Leftrightarrow\ (z_F-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i)=(-i-\sqrt{3})\\ &\Leftrightarrow\ z_F=-i-2\sqrt{3}i+2\\ &\Leftrightarrow\ z_F=2-i(1+2\sqrt{3})\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}r(D)=E&\Leftrightarrow\ z_E=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z_D-\sqrt{3})+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}i-\sqrt{3})+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(2-2\sqrt{3}i)+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)2(1-\sqrt{3}i)+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=1^2-(i\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=1-(-3)+\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow\ z_E=4+\sqrt{3}\end{array}$$

Montrons d'abord que BEF est équilatéral.

$$On\ a\ :\ \left|\begin{array}{l}z_B=i\\ z_E=4+\sqrt{3}\\ z_F=2-(1+2\sqrt{3})i\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl}\Longrightarrow\ BE=|z_E-z_B|&=|4+\sqrt{3}-i|\\ &=\sqrt{(4+\sqrt{3})^2+(-1)^2}\\ &=\sqrt{16+8\sqrt{3}+3+1}\\ &=\sqrt{20+8\sqrt{3}}\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}Et\ :\ BF=|z_F-z_B|&=|2-(1+2\sqrt{3})i-i|\\ &=|2-i(2+2\sqrt{3})|\\ &=\sqrt{2^2+(2+2\sqrt{3})^2}\\ &=\sqrt{4+4+8\sqrt{3}+12}\\ &=\sqrt{20+8\sqrt{3}}\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}Et\ :\ EF=|z_F-z_E|&=|2-i-2\sqrt{3}i-4-\sqrt{3}|\\ &=|-(2+\sqrt{3})-i(1+2\sqrt{3})|\\ &=|(2+\sqrt{3})+i(1+2\sqrt{3})|\\ &=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(1+2\sqrt{3})^2}\\ &=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1+4\sqrt{3}+12}\\ &=\sqrt{20+8\sqrt{3}}\end{array}$$

On remarque que $BE=BF=EF=\sqrt{20+8\sqrt{3}}$
Donc BEF est bien un triangle équilatéral.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Rappel : (le petit théorème de Fermat)

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \implies a^{p-1} \equiv 1[p]$$

On a p est un nombre premier. On a aussi $a \wedge p = 1$ car $a < p$. Donc c'est impossible d'avoir p soit un diviseur de a. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, On écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$. D'où $a\,(a^{p-2}) \equiv 1[p]$. Et cela veut dire que a^{p-2} est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}$.

La Question : 1) b)

Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} sur p

$$\left| \begin{array}{l} a^{p-2} \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N} \end{array} \right. \implies \left| \begin{array}{l} \exists!\, r \in \{0\,;1\,;2\,;\cdots;p-1\} \\ a^{p-2} \equiv r[p] \end{array} \right.$$

Si $r = 0$ alors p divise a^{p-1} .

$$\begin{aligned} &\implies p \textit{ divise } a \textit{ car } p \textit{ est premier} \\ &\implies p < a \\ &\implies \textit{Absurde car } a < p \\ &\implies r \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $a^{p-2} \equiv r[p]$ $\textit{et}$ $r \in \{1\,;2\,;\,\cdots;\,p-1\,\}$.
D'où $a^{p-1} \equiv ar[p]$ $\textit{et}$ $r \in A_p$. Or d'après le petit théorème de Fermat on écrit :
$a^{p-1} \equiv 1[p]$ $\textit{car}$ $p \in \mathbb{P}$ $\textit{et}$ $a \wedge p = 1$.

résumons : $\begin{cases} a^{p-1} \equiv ar[p] \ ; \ r \in A_p \\ a^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} ar \equiv 1[p] \\ r \in A_p \end{cases} ; \ \textit{car } \text{"}\equiv\text{"} \textit{ est transitive}$$

r est donc la seule solution de (E) dans A_p

La Question : 2) a)

On pose $p = 31$,
pour $a = 2$ on a : $(\exists!\, r \in A_{31})$; $2^{29} \equiv r[31]$ $(*)$.
Or, $2^5 = 32 \equiv 1[31] \implies (2^5)^5 \equiv 1^5[31]$

$$\begin{aligned} &\implies 2^{25} \equiv 1[31] \\ &\implies 2^4 \times 2^{25} \equiv 2^4[31] \\ &\implies \boxed{2^{29} \equiv 16[31]} \ (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \textit{ et } (**) &\implies r \equiv 16[31] \\ &\implies \boxed{31/(r-16)} \ ■ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in A_{31} \ \textit{Alors} \ r &\in \{1\,;2\,;\cdots;30\} \\ &\implies \boxed{|r-16| < 31} \ ■■ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ■ \textit{ et } ■■ &\implies |r-16| = 0 \\ &\implies \boxed{r = 16} \end{aligned}$$

Pour $a = 3$; $\exists!\, r \in A_{31}$; $3^{29} \equiv r[31]$ $\otimes$
Or $3^6 = 729 \equiv 16[31]$

$$\begin{aligned} &\implies (3^6)^4 \equiv (2^4)^4[31] \\ &\implies 3^{24} \equiv 2^{16}[31] \ (\star) \end{aligned}$$

Aussi $2^{16} = (2^5)^3 \times 2 \equiv 1^3 \times 2[31]$

$$\implies 2^{16} \equiv 2[31] \ (\star\star)$$

$$\begin{aligned} (\star) \textit{ et } (\star\star) &\implies 3^{24} \equiv 2[31] \\ &\implies 3^{24} \times 3^5 \equiv 2 \times 3^5[31] \\ &\implies 3^{29} \equiv 486[31] \\ &\implies 3^{29} \equiv 21[31] \ \otimes\otimes \ \textit{car } 486 \equiv 21[31] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes \textit{ et } \otimes\otimes &\implies r \equiv 21[31] \\ &\implies \boxed{31/(r-21)} \ (\circledast) \end{aligned}$$

$\textit{comme}$ $r \in A_{31} = \{1\,;2\,;\,\cdots;30\}$
$\textit{Alors}$: $\boxed{|r-21| < 31}$ $(\circledast\circledast)$

$$\begin{aligned} \circledast \textit{ et } \circledast\circledast &\implies |r-21| = 0 \\ &\implies \boxed{r = 21} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Soit x une solution de l'équation (F_1)

$$x \textit{ est solution de } (F_1) \iff \begin{cases} 2x \equiv 1[31] \\ 2(16) \equiv 1[31] \end{cases}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités modulo 31 on trouve :

$$\begin{aligned} 2(x-16) \equiv 0[31] &\implies 31 \textit{ divise } 2(x-16) \\ &\implies 31/(x-16) \ \textit{car } 31 \wedge 2 = 1 \\ &\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \ x - 16 = 31k \\ &\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \ x = 31k + 16 \end{aligned}$$

Inversement : Montrons que tous les entiers relatifs de la forme $(31k + 16)$ vérifient-bien l'équation (F_1)

$\textit{On a}$: $2(31k + 16) = 62k + 32$

$\textit{comme}$ $\begin{cases} 62k \equiv 0[31] \\ 31 \equiv 1[31] \end{cases}$ $\textit{alors}$ $(62k + 32) \equiv 1[31]$

D'où l'ensemble des solutions de (F_1) est définie implicitement par : $\mathcal{S} = \{31k + 16 \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$

De même, pour l'équation (F_2) : $3x \equiv 1[31]$
Sachant que $3 \times 21 \equiv 1[31]$ $d'après\ 2)a)$

$$\begin{cases} 3x \equiv 1[31] \\ 3(21) \equiv 1[31] \end{cases} \Longrightarrow \quad 3(x-21) \equiv 0[31]$$
$$\Longrightarrow \quad 31/3(x-21)$$
$$\Longrightarrow \quad 31/(x-21) \ ; \ car\ 31 \wedge 3 = 1$$
$$\Longrightarrow \quad (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x - 21 = 31k$$
$$\Longrightarrow \quad (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x = 31k + 21$$

<u>Inversement</u>, On montre que tout entier relatif de la forme $(31k+21)$ est bien une solution de (F_2)

$$On\ a\ : \ 31k \equiv 0[31] \ \Longrightarrow \ 3(31k) \equiv 0[31]$$
$$\Longrightarrow \ 3(31k) + 3(21) \equiv 1[31]$$
$$car\ \ 3(21) = 63 \equiv 1[31]$$
$$\Longrightarrow \ 3(31k + 21) \equiv 1[31]$$

D'où l'ensemble des solutions de (F_2) est défini implicitement par $\mathcal{S}_2 = \{\, 31k + 21 \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z} \,\}$

<u>La Question : 2) c)</u>

Soit x une solution de (F) dans $\mathbb{Z}$.

$$x\ \ est\ solution\ de\ (F) \ \Leftrightarrow \ 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$$
$$\Leftrightarrow \ (2x-1)(3x-1) \equiv 0[31]$$
$$\Leftrightarrow \ 31/(2x-1)(3x-1)$$
$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} oubien\ \ 31/(2x-1) \\ oubien\ \ 31/(3x-1) \end{cases} ; \ car\ \ 31 \ \epsilon\ \mathbb{P}$$
$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} oubien\ \ 2x \equiv 1[31] \\ oubien\ \ 3x \equiv 1[31] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} ou\ bien\ \ x\ \ est\ \ solution\ de\ (F_1) \\ ou\ bien\ \ x\ \ est\ \ solution\ de\ (F_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ \begin{cases} ou\ bien\ \ x\ \epsilon\ \{31k + 16 \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z}\} \\ ou\ bien\ \ x\ \epsilon\ \{31k + 21 \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z}\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ x\ \epsilon\ \{\, 31k + 16 \ ; \ 31k + 21 \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z} \,\}$$
$$\Leftrightarrow \ \mathcal{S} \ = \ \{\, 31k + 16 \ ; \ 31k + 21 \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z} \,\}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

<u>La Question : I) 1)</u>

$$\int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x (e^t - t - 1)\,dt$$
$$= \int_0^x e^t\,dt - \int_0^x t\,dt - \int_0^x dt$$
$$= [e^t]_0^x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - [t]_0^x$$
$$= e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x$$
$$\Longrightarrow \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$

<u>La Question : I) 2)</u>

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant une somme de fonctions toutes dérivables.

$$h'(x) = e^x - 1 \ ; \ (\forall x \epsilon \mathbb{R})$$

$$h'(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow \ e^x - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \ x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \ x\ \epsilon\ ]-\infty, 0]$$
$$\Leftrightarrow \ h\ est\ décroissante\ \ sur\ \ ]-\infty, 0]$$

$$h'(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ e^x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ x\ \epsilon\ [0, +\infty[$$
$$\Leftrightarrow \ h\ est\ croissante\ \ sur\ \ [0, +\infty[$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>La Question : I) 3)</u>

On a d'après la question 1) :

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$
$$\Longrightarrow \ e^x - (1+x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$
$$\Longrightarrow \ \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \ ; \ x \neq 0$$
$$\Longrightarrow \ (\forall x \neq 0) \ ; \ \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \ \ (*)$$

Soient $x\ \epsilon\ \mathbb{R}_+^*$ et $t\ \epsilon\ [0, x]$. (t est variable muette)

$$t\ \epsilon\ [0, x] \ \Longrightarrow \ 0 \leq t \leq x$$
$$\Longrightarrow \ h(0) \leq h(t) \leq h(x) \ ; \ car\ h\ \nearrow\ [0, +\infty[$$
$$\Longrightarrow \ 0 \leq h(t) \leq h(x)$$
$$\Longrightarrow \ \int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq \int_0^x h(x)\,dt$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $0 < x$ gardera le sens de l'ordre inchangeable

$$\Longrightarrow \ 0 \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq (x - 0)h(x)$$
$$\Longrightarrow \ 0 \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \leq \frac{x\,h(x)}{x^2} \ ; \ x^2 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \le \frac{h(x)}{x} \quad ; \quad selon\ (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \le \frac{h(x)}{x^2} \le \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \le \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall x > 0$$

La Question : I) 4)

Soient x dans $\mathbb{R}_-^*$ et t dans $[x, 0]$.

$$\begin{aligned} t \in [x,0] \quad &\Longrightarrow \quad x \le t \le 0 \\ &\Longrightarrow \quad h(x) \ge h(t) \ge h(0) \ ; \ h \searrow \ ]-\infty, 0] \\ &\Longrightarrow \quad h(x) \ge h(t) \ge 0 \\ &\Longrightarrow \quad \int_x^0 h(x)\,dt \ge \int_x^0 h(t)\,dt \ge \int_x^0 0\,dt \end{aligned}$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $x < 0$ gardera le sens de l'ordre inchangeable

$$\Longrightarrow \quad (0 - x)h(x) \ge -\int_0^x h(t)\,dt \ge 0$$

$$\Longrightarrow \quad -x\,h(x) \ge -\int_0^x h(t)\,dt \ge 0$$

$$\Longrightarrow \quad x\,h(x) \le \int_0^x h(t)\,dt \le 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x\,h(x)}{x^2} \le \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \le \frac{0}{x^2} \quad ; \quad x > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{h(x)}{x} \le \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \le 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{h(x)}{x} \le \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \le 0 \quad ; \quad selon\ (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \le \frac{h(x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \le \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall x < 0$$

La Question : I) 5)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right) - \lim_{x\to 0} 1 \\ &= (e^x)'_{/x=0} - 1 \\ &= e^0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = 0$$

Si $(x \in \mathbb{R}_+^*)$ on obtient selon la question 3) :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{x \to 0^+ \ \searrow \ \frac{1}{2}} \le \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \underbrace{\left(\frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2}\right)}_{x \to 0^+ \ \searrow \ \frac{1}{2}}$$

$$D'où : \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad (\odot)$$

Si $(x \in \mathbb{R}_-^*)$ on obtient selon la question 4) :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}\right)}_{x \to 0^- \ \swarrow \ \frac{1}{2}} \le \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{x \to 0^- \ \swarrow \ \frac{1}{2}}$$

$$D'où : \quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad (\odot\odot)$$

De $(\odot)$ et $(\odot\odot)$ on tire la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Sur $]-\infty, 0[$ $et\ sur$ $]0, +\infty[$, il est clair que f est continue comme étant quotient de deux fonctions continues et $(e^x - 1) \neq 0$.
Etudions alors la continuité en 0 .

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right)} = \frac{1}{(e^x)'_{/x=0}} \\ &= \frac{1}{e^0} = 1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0 .
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : II) 2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \frac{1}{+\infty-0} = 0$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \frac{-\infty}{e^{-\infty}-1}$$
$$= \frac{-\infty}{0^+-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$$
$$= \frac{1}{e^{-\infty}-1} = \frac{1}{0^+-1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+1x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}+x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+xe^x-x}{e^x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)$$
$$= \frac{0^-}{e^{-\infty}-1} = \frac{0^-}{0^+-1} = 0$$

Donc la droite (Δ) : $y=-x$ (la $2^{ème}$ bissectrice) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$

La Question : II) 3)

On se sert des deux limites suivantes :

$$\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=1}_{} \quad et \quad \underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-(x+1)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}}_{}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\frac{e^x-e^0}{x-0}}\right) = \frac{1}{e^0} \qquad D'après\ I)5)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to0}\frac{-x\left(e^x-(x+1)\right)}{x^2(e^x-1)}$$
$$= \lim_{x\to0} -\left(\frac{e^x-(x+1)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\times(1)$$
$$= \frac{-1}{2} = f'(0)$$

D'où f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{-1}{2}$.

La Question : II) 4)

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est un quotient de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x-1)\neq0$; $\forall x\epsilon\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x-1}\right)' = \frac{1(e^x-1)-e^x(x)}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)^2} \ ; \ \varphi(x) = (1-x)e^x-1$$

La Question : II) 5)

φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier . $\varphi'(x) = -e^x+(1-x)e^x = -xe^x$

Remarque : $\varphi'(x)\geq0\ sur\ \mathbb{R}^-\ et\ \varphi'(x)\leq0\ sur\ \mathbb{R}^+$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que :

$$\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ \varphi(x)\leq0$$
$$d'où :\ \forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}^*\ ;\ \varphi(x)<0$$

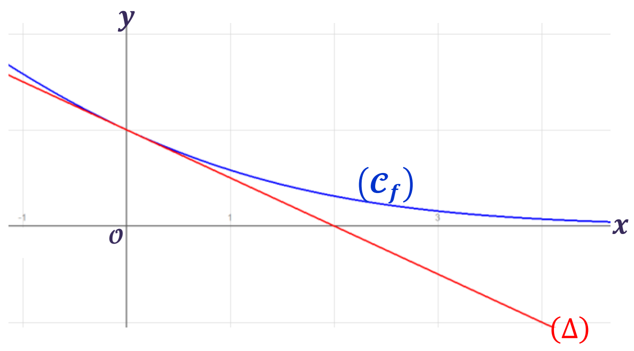
La Question : II) 6)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

La Question : II) 7)

Soit (Δ) la tangente de $\mathcal{C}_f$ en 0.

$$(\Delta):\ \ y=(x-0)f'(0)+f(0)$$
$$(\Delta):\ \ y=-\frac{1}{2}x+1$$



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions toutes continue sur $\mathbb{R}$.
Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x > y$.
Alors $f(x) < f(y)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Et On a aussi $-x < -y$. en passant à la somme, on obtient : $f(x) - x < f(y) - y$ c-à-d $g(x) < g(y)$.

Ainsi, On a pu montrer l'implication suivante :

$$x > y \implies g(x) < g(y)$$

Ce qui veut dire que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. et à cause de la continuité, g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})$.

$$g(\mathbb{R}) = g(\,]-\infty;+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\right[$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

Ainsi, g est une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Comme 0 est un élément de $\mathbb{R}$, Alors il admet un antécédent α dans $\mathbb{R}$ via la bijection g.
Dans le cas général on écrit :

$$(\forall y \epsilon \mathbb{R})(\exists!\, x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) = y$$

$$(\,pour\ 0 \in \mathbb{R}\,)(\exists!\, \alpha \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(\alpha) = 0$$

$$(\exists!\, \alpha \epsilon \mathbb{R})\quad ;\quad f(\alpha) = \alpha$$

c-à-d que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, ($f(\alpha) = \alpha$)

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \alpha \\
&\iff \frac{1}{e^{\alpha} - 1} = 1\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\iff e^{\alpha} - 1 = 1\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\iff e^{\alpha} = 2\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\iff \alpha = \ln 2\ ;\ avec\ \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

$$\begin{aligned}
pour\ x > 0\ ;\ f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2\varphi(x) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\
&= \frac{2e^x(1 - x) - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}
\end{aligned}$$

La Question : III) 2) b)

$$Soient\ :\ \begin{cases} (\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ h(x) = e^x - x - 1 \\ (\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \psi(x) = e^{2x} - 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Pour\ x \geq 0 &\implies e^x \geq e^0\ ;\ car\ Exp\ est\ \nearrow \\
&\implies e^x - 1 \geq 0 \\
&\implies h'(x) \geq 0\ ;\ car\ h'(x) = e^x - 1 \\
&\implies h\ est\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}^+ \\
&\implies h(x) \geq h(0) \\
&\implies h(x) \geq 0\quad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pour\ x \epsilon \mathbb{R} \implies \psi'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2x\, e^x \\
&= 2e^x(e^x - 1 - x) \\
&= 2e^x h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pour\ x \epsilon \mathbb{R}^+ &\implies e^x > 0\ \ et\ \ h(x) \geq 0 \\
&\implies 2e^x\, h(x) \geq 0 \\
&\implies \psi'(x) \geq 0 \\
&\implies \psi(x)\ est\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}^+ \\
&\implies \psi(x) \geq \psi(0) \\
&\implies \psi(x) \geq 0 \\
&\implies e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

La déduction : $x \in \mathbb{R}^+ \implies e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geq 0 \\
&\implies f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\implies f'(x) \geq \frac{-1}{2} \\
&\implies 0 > f'(x) \geq -\frac{1}{2}\ ;\ car\ \varphi(x) < 0
\end{aligned}$$

La Question : III) 3) a)

On a vu, d'après les résultats précédents, que f est continue et est dérivable sur ℝ tout entier. Donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle $[a,b]$ dans ℝ .
Pour $[\alpha,u_n] \subset \mathbb{R}$; $\exists\, c \in]\alpha,u_n[$: $\dfrac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha} = f'(c)$

$$\Longrightarrow \ \exists\, c \in]\alpha,u_n[\subset \mathbb{R}^+ \ ; \ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |f'(c)|$$

$$On\ a\ \ c \in]\alpha,u_n[\subset \mathbb{R}^+$$

$$\Longrightarrow \ \frac{-1}{2} \le f'(c) < 0 \ ; \ d'après\ 2)b)$$

$$\Longrightarrow \ \frac{-1}{2} \le f'(c) < 0 < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \ \frac{-1}{2} \le f'(c) < \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \ |f'(c)| \le \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \le \frac{1}{2} \quad ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \ |f(u_n)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

La Question : III) 3) b)

Par récurrence, On démontre aisément la véracité du prédicat $P(n)$ défini ainsi :

$$(P_n) \ : \ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-\alpha)$$

Pour $n=0$; $|1-\ln 2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |1-\ln 2|$

Ainsi l'instance $P(0)$ est vérifiée (c-à-d vraie)

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, On suppose que $P(n)$ est vraie

$$(P_n)\ est\ vraie \ \Longrightarrow \ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

$$\Longrightarrow \ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\alpha|$$

$$\Longrightarrow \ |u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1-\alpha)$$

$$\Longrightarrow \ P(n+1)\ est\ vraie$$

$$Finalement \ : \ \begin{cases} P(0)\ est\ vraie \\ P(n)\ implique\ P(n+1) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où, d'après le principe de récurrence, On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1-\alpha)$

On remarque que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $(1-\alpha)$ est un nombre réel. On obtient alors la situation suivante :

$$|u_n-\alpha| \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n (1-\alpha)}_{n\infty \ \to\ 0}$$

Donc, d'après le critère de comparaison dans la convergence des suites numériques réelles, On déduit :

$$\lim_{n\infty} |u_n-\alpha| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\infty} (u_n) = \alpha$$

La Question : IV) 1)

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [x,2x]$,

$$t \in [x,2x] \ \Longrightarrow \ x \le t \le 2x$$

$$\Longrightarrow \ 0 \le x \le t \le 2x$$

$$\Longrightarrow \ f(0) \ge f(x) \ge f(t) \ge f(2x) \ ; \ f \searrow \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \ f(x) \ge f(t) \ge f(2x) \ge 0$$

$$\Longrightarrow \ f(x) \ge f(t) \ge 0$$

$$\Longrightarrow \ \int_x^{2x} \langle f(x) \ge f(t) \ge 0 \rangle \, dt$$

J'ai introduit $\int_x^{2x} dt$ car la continuité est vérifiée, et $x < 2x$ gardera le sens de l'ordre inchangeable.

$$\Longrightarrow \ \int_x^{2x} f(x)\,dt \ge \int_x^{2x} f(t)\,dt \ge \int_x^{2x} 0\,dt$$

$$\Longrightarrow \ x\,f(x) \ge F(x) \ge 0 \quad (*)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^{2\left(\frac{x}{2}\right)}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=\frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}(+\infty)^2 - \frac{1}{4}(0)^2} = 0$$

Ainsi l'inégalité $(*)$ devient :

$$\underbrace{x\,f(x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ 0} \geq F(x) \geq \underbrace{0}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ 0}$$

D'où, d'après le critère de comparaison dans la convergence des fonctions, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

La Question : IV) 2)

Soient $x \leq 0$ et $t \in [2x, x]$

$$\begin{aligned}
t \in [2x,x] \quad &\Longrightarrow \quad 2x \leq t \leq x \\
&\Longrightarrow \quad t \leq x \\
&\Longrightarrow \quad f(t) \geq f(x) \ ; \ f \ est \searrow sur \ \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)\,dt \quad ; \quad 2x \leq x \\
&\Longrightarrow \quad -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \geq -x\,f(x) \\
&\Longrightarrow \quad -F(x) \geq -x\,f(x) \\
&\Longrightarrow \quad F(x) \leq x\,f(x) \quad (\star)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x\,f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{e^2-1}\right) \\
&= \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}-1} = \frac{+\infty}{0-1} = -\infty
\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $F(x) \leq \underbrace{x\,f(x)}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{}\ -\infty}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

On multiplie les deux cotés de l'inégalité $(\star)$ par le nombre réel négatif $\left(\frac{1}{x}\right)$ on obtient :

$$\frac{F(x)}{x} \geq \underbrace{f(x)}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{}\ +\infty}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

La Question : IV) 3)

Soit a un nombre réel non nul. f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En particulier, f admet une primitive ψ qui s'annule en a et qui est définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \ ; \ \psi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$$

C'est clair que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Et $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\psi'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\,dt \\
&= \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{2x} f(t)\,dt \\
&= -\int_a^x f(t)\,dt + \int_a^{2x} f(t)\,dt \\
&= -\psi(x) + \psi(2x)
\end{aligned}$$

f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme étant différence de deux compositions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$F(x) = \psi(2x) - \psi(x) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad F'(x) &= 2\psi'(2x) - \psi'(x) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \\
&= 2f(2x) - f(x) \\
&= 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{e^x-1} \\
&= \frac{4x}{(e^x-1)(e^x+1)} - \frac{x(e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)} \\
&= \frac{4x - x\,e^x - x}{e^{2x}-1} \\
&= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}
\end{aligned}$$

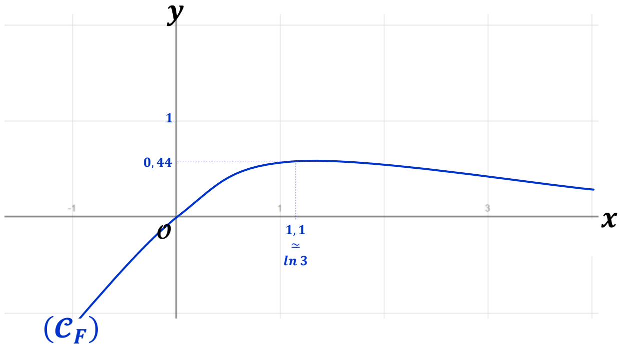
Voyons d'abord est-ce que F est dérivable en 0

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} F'(x) &= \lim_{x\to0} \left(\frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}\right) \\
&= \lim_{x\to0} \frac{1}{\left(\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}\right)} \cdot \left(\frac{3-e^x}{2}\right) \\
&= \left(\lim_{\substack{t\to0\\ t=2x}} \frac{1}{\left(\frac{e^t-e^0}{t-0}\right)}\right) \times \left(\lim_{x\to0} \left(\frac{3-e^x}{2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{e^0}\right) \times \left(\frac{3-e^0}{2}\right) \\
&= 1 = F'(0)
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} F'(x) = \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}^* \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

La Question : IV) 4)

x	$-\infty$	0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$	$+$	1	$+$	0	$-$	
F	$-\infty$ ↗	0	↗	$0{,}44$	↘	0



Oujda

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{ M\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}MA = 2MM' \right\} \\
&= \left\{ M\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}|z_A - z_M| = 2|z_{M'} - z_M| \right\} \\
&= \left\{ M\binom{x}{y}\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy\right| = 2\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy - iy\right| \right\} \\
&= \left\{ M\binom{x}{y}\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x\right)^2 + y^2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2} \right\} \\
&= \left\{ M\binom{x}{y}\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 3\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x\right)^2 + y^2\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 \right\} \\
&= \left\{ M\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 3\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}x + x^2 + y^2\right) = 4\left(\frac{3}{4} - \sqrt{3}x + x^2\right) \right\} \\
&= \left\{ M\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 4 - 4\sqrt{3}x + 3x^2 + 3y^2 = 3 - 4\sqrt{3}x + 4x^2 \right\} \\
&= \left\{ M\binom{x}{y}\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ -x^2 + 3y^2 = -1 \right\} \\
&= \left\{ M\binom{x}{y}\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ -x^2 + 3y^2 = -1\ ;\ (x,y)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 \right\}
\end{aligned}
$$

La Question : 2) a)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_f &= \left\{ x\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ \frac{x^2 - 1}{3} \geq 0 \right\} \\
&= \{ x\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ x^2 - 1 \geq 0 \} \\
&= \{ x\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ (x-1)(x+1) \geq 0 \} \\
&= \{ x\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ x\,\epsilon\,]-\infty, -1]\ ou\ x\,\epsilon\,[1, +\infty[\, \} \\
&=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[
\end{aligned}
$$

$soit\ x\,\epsilon\,\mathcal{D}_f\ alors\ -x\,\epsilon\,\mathcal{D}_f$

$$
car :\ \left| \begin{array}{l} x \leq -1 \ \Rightarrow\ -x \geq 1 \\ x \geq 1 \ \Rightarrow\ -x \leq -1 \end{array} \right.
$$

$$
f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = f(x)
$$

$D'\text{où}\ f\ est\ une\ fonction\ paire$

La Question : 2) b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}}}{x - 1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x - 1}\right)\left(\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{3}}\right) \\
&= \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t = x - 1}}\left(\frac{1}{t}\right)\left(\sqrt{\frac{t(t+2)}{3}}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{t(t+2)}{3t^2}}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{t+2}{3t}}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3t}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{0^+}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3} + \infty} = +\infty \notin \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 .

La Question : 2) c)

$$
\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = +\infty
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3x^2}} \\
&= \lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3x^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)$$

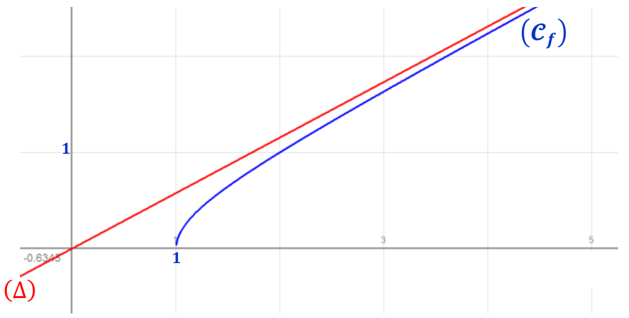
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}$$

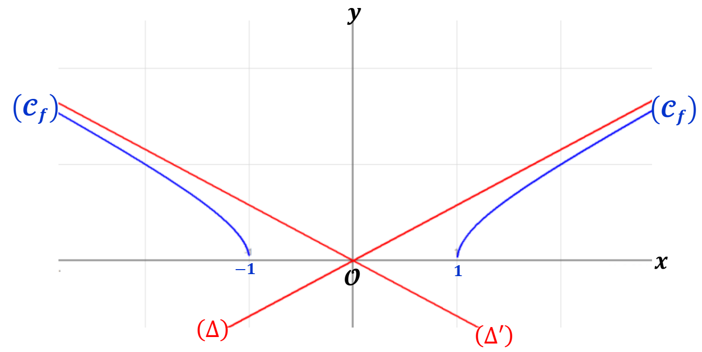
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^2-1}{3}-\frac{3x}{9}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{3}}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}=\frac{\frac{-1}{3}}{+\infty}=0$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases}\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)=+\infty\end{cases}$$

c-à-d que la droite $(\Delta) : y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$





La Question : 2) d)

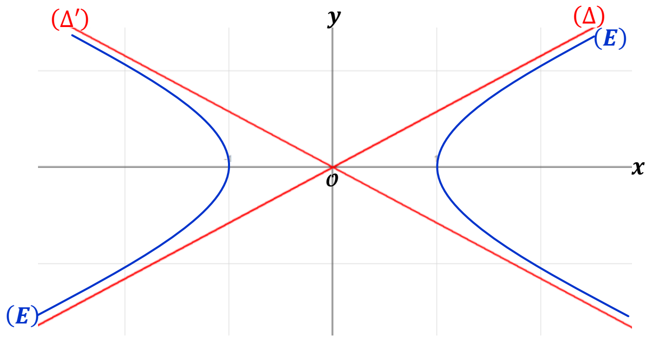
$$E=\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ \ x^2-3y^2=1\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ \ y^2=\frac{x^2-1}{3}\right\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ \ y=\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}\right\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ \ y=\begin{vmatrix}oubien\ f(x)\\ oubien\ -f(x)\end{vmatrix}\right\}$$

$$=(\mathcal{C}_f)\cup(\mathcal{C}_{-f})$$



La Question : 3) a)

Pour simplifier, l'écriture : $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd\\ad+bc\end{pmatrix}$.

et c'est juste pour dire :

$M(a+ib)\top M(c+id)=M\big((ac+3bd)+i(ad+bc)\big)$.

Bien évidemment cette invention aidera à simplifier les notations. Soient $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ trois éléments du plan complexe,

$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)\top\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd\\ad+bc\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e(ac+3bd)+3f(ad+bc)\\f(ac+3bd)+e(ad+bc)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}eac+3bde+3fad+3fbc\\fac+3bdf+ead+ebc\end{pmatrix}\quad(*)$$

$$d'autre\ part:\ \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\left(\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}ec+3df\\cf+ed\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a(ec+3df)+3b(cf+ed)\\a(cf+ed)+b(ec+3df)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}aec+3dfa+3bcf+3bed\\acf+aed+bec+3dfb\end{pmatrix}\quad(**)$$

Celui qui jettera un coup d'œil sur $(*)$ et $(**)$ se rendra compte qu'il s'agit bien d'un même point dans le plan complexe

D'où : $\left[\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right]\top\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\left[\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right]$

Donc l'associativité de la loi $\top$ est vérifiée .

La Question : 3) b)

Soients $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ deux points de E

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\top\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+3by\\ay+bx\end{pmatrix}$$

$$(ax+3bd)^2-3(ay+bx)^2$$
$$= a^2x^2+9b^2y^2+6axby-3a^2y^2-3b^2x^2-6axby$$
$$= x^2(a^2-3b^2)-3y^2(a^2-3b^2)$$
$$= (a^2-3b^2)(x^2-3y^2)$$

$$\left(\binom{a}{b},\binom{x}{y}\right) \in E^2 \iff a^2-3b^2=1 \ et \ x^2-3y^2=1$$
$$\Rightarrow (a^2-3b^2)(x^2-3y^2)=1$$
$$\Rightarrow (ax+3bd)^2-3(ay+bx)^2=1$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax+3by \\ ay+bx \end{pmatrix} \in E$$
$$\Rightarrow \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} \in E$$

$$Ainsi : \forall\left(\binom{a}{b},\binom{x}{y}\right) \in E^2 \ ; \ \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} \in E$$

C-à-d que la loi T est une loi de composition interne dans E. Autrement-dit, l'ensemble E est stable par la loi T .

La Question : 3) c)

On a T est une loi de composition interne dans E et cette loi est associative dans l'ensemble E. pour que E soit un groupe il suffit de vérifier les assertions suivantes : l'admission d'un élément neutre dans E et tout élément de E admet un symetrique dans E.

L'élément neutre :

Soit $\binom{a}{b}$ l'élément neutre de la loi T dans E .

Alors : $\forall \binom{x}{y} \in E \ ; \ \binom{x}{y} \top \binom{a}{b} = \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} = \binom{x}{y}$

$$\binom{x}{y} \top \binom{a}{b} = \binom{x}{y} \iff \begin{pmatrix} ax+3by \\ xb+ay \end{pmatrix} = \binom{x}{y}$$
$$\iff \begin{cases} ax+3by=x \\ xb+ay=y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x(a-1)+3by=0 \\ xb+y(a-1)=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} xb(a-1)+3b^2y=0 \\ xb(a-1)+y(a-1)^2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3b^2y-y(a-1)^2=0$$
$$\Rightarrow -y(a^2-3b^2)+2ay-y=0$$
$$\Rightarrow -y+2ay-y=0 \ ; \ car \ (a^2-3b^2)=1$$
$$\Rightarrow a=1$$
$$\Rightarrow b=0$$

$$Inversement : \left| \begin{array}{l} \binom{x}{y} \top \binom{1}{0} = \begin{pmatrix} 1x+3\times 0\times y \\ 0x+1y \end{pmatrix} = \binom{x}{y} \\ \binom{1}{0} \top \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1x+3\times 0\times y \\ 1y+0x \end{pmatrix} = \binom{x}{y} \end{array} \right.$$

Ainsi $\binom{1}{0}$ est l'élément neutre de la loi T dans E .

La symétrie :

Soit $\binom{x}{y}$ un élément de E.

Et soit $\binom{x'}{y'}$ son symétrique dans E.

$$\Rightarrow \binom{x}{y} \top \binom{x'}{y'} = \binom{x'}{y'} \top \binom{x}{y} = \binom{1}{0}$$
$$\Rightarrow \binom{x}{y} \top \binom{x'}{y'} = \binom{1}{0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xx'+3yy'=1 \\ xy'+yx'=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} yxx'+3y^2y'=y \\ x^2y'+xyx'=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3y^2y'-x^2y'=y$$
$$\Rightarrow -y'(x^2-3y^2)=y$$
$$\Rightarrow -y'=y$$
$$\Rightarrow y'=-y \ ; \ ainsi \ x'=x$$
$$\Rightarrow \binom{x'}{y'} = \binom{x}{-y} \in E \ car \ x^2-3(-y)^2=1$$

Inversement :
$$\left| \begin{array}{l} \binom{x}{y} \top \binom{x}{-y} = \begin{pmatrix} x^2-3y^2 \\ -xy+xy \end{pmatrix} = \binom{1}{0} \\ \binom{x}{-y} \top \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x^2-3y^2 \\ xy-xy \end{pmatrix} = \binom{1}{0} \end{array} \right.$$

Donc tout élément $\binom{x}{y}$ dans E admet un seul symétrique $\binom{x}{-y}$ dans E.

Finalement : On conclut que $(E,\top)$ est un groupe abélien (commutatif). il est commutatif car la loi T est commutatif dans E.

$$\left[\binom{a}{b} \top \binom{c}{d} = \begin{pmatrix} ac+3bd \\ ad+bc \end{pmatrix} = \binom{c}{d} \top \binom{a}{b}\right]$$

La Question : 1) a)

1ère Méthode : la décomposition en facteurs premiers : les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 109 sont 2 ,3 ,5 et 7.
Et on remarque que 109 n'est pas divisible par aucun de ces nombres. Alors 109 est un nombre premier. De même, pour $226 = 2 \times 113$, les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 113 sont 2, 3 , 5 et 7. On remarque que 113 n'est pas divisible par aucun de ces nombres, Alors c'est un nombre premier.
D'où : $226 \wedge 109 = 2 \times 113 \wedge 109 = 1$.
C-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

$2^{ème}$ Méthode : l'algorithme d'Euclide

$\boxed{\begin{matrix} 226 & 109 \\ 8 & 2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{226 \wedge 109 = 109 \wedge 8}$

$\boxed{\begin{matrix} 109 & 8 \\ 5 & 13 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{109 \wedge 8 = 8 \wedge 5}$

$\boxed{\begin{matrix} 8 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{8 \wedge 5 = 5 \wedge 3}$

$\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{5 \wedge 3 = 3 \wedge 2}$

$\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{3 \wedge 2 = 2 \wedge 1}$

$\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{2 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 1}$

D'où $226 \wedge 109 = 1$
c-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

Rappel : une équation $ax + by = c$ est résoluble dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $(a \wedge b)$ divise le nombre c . On a $226 \wedge 109 = 1$ divise bien le nombre 1 . Alors l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

La Question : 1) b)

Revenons à nouveau à ce mouton qui est l'algorithme d'Euclide pour détecter une solution particulière de l'équation (E)

$\boxed{\begin{matrix} 226 & 109 \\ 8 & 2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{8 = 226 - 2 \times 109} \rightsquigarrow (1)$

$\boxed{\begin{matrix} 109 & 8 \\ 5 & 13 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{5 = 109 - 13 \times 8} \rightsquigarrow (2)$

$\boxed{\begin{matrix} 8 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{3 = 8 - 5 \times 1} \rightsquigarrow (3)$

$\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{2 = 5 - 3 \times 1} \rightsquigarrow (4)$

$\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{1 = 3 - 2 \times 1} \rightsquigarrow (5)$

$\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \Rightarrow \textit{I'm not gonna need that} \rightsquigarrow (6)$

$$
\begin{aligned}
(5) \quad & \Rightarrow \quad 1 = 3 - 2 \times 1 \\
& \Rightarrow \quad 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 \ ; \ \textit{selon } (4) \\
& \Rightarrow \quad 1 = 2 \times 3 - 1 \times 5 \ ; \ \textit{Simplification} \\
& \Rightarrow \quad 1 = 2 \times (8 - 5) - 5 \ ; \ \textit{selon } (3) \\
& \Rightarrow \quad 1 = 2 \times 8 - 3 \times 5 \ ; \ \textit{Simplification} \\
& \Rightarrow \quad 1 = 2 \times 8 - 3(109 - 13 \times 8) \ ; \ \textit{selon } (2) \\
& \Rightarrow \quad 1 = 41 \times 8 - 3 \times 109 \ ; \ \textit{Simplification} \\
& \Rightarrow \quad 1 = 41 \times (226 - 2 \times 109) - 3 \times 109 \ ; \ \textit{selon } (1) \\
& \Rightarrow \quad 1 = 41 \times 226 - 85 \times 109 \ ; \ \textit{Simplification} \\
& \Rightarrow \quad 109(-85) - 226(-41) = 1 \ ; \ \textit{Réorganisation}
\end{aligned}
$$

Ce qui veut dire que $(-85, -41)$ est une solution particulière de l'équation (E). Soit (x, y) une solution de (E) et partons du système suivant :

$$\begin{cases} (x, y) \ \textit{est solution de } (E) \\ (-85, -41) \ \textit{est solution de } (E) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109(-85) - 226(-41) = 1 \end{cases}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités on trouve :

$$109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$$

$$c - à - d \ : \ 109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (*)$$

D'après $(*)$ on remarque que 109 divise le produit $226(y + 41)$, mais d'après Gauss, 109 et 226 sont premiers entre eux. Alors 109 divise $(y + 41)$. Il existe alors un entier relatif k' tel que $y + 41 = 109k'$. ou encore $y = 109k' - 41$.
On remplace dans $(*)$ on trouve $x = 226k' - 85$.
un petit changement de variables accomplira la tache, on pose ainsi $k' = k + 1$ On trouve :

$$\begin{cases} x = 226k' - 85 = 226(k + 1) - 85 = \boxed{226k + 141} \\ y = 109k' - 41 = 109(k + 1) - 41 = \boxed{109k + 68} \end{cases}$$

Ainsi, On a pu montrer l'implication directe suivante : Si (x, y) est solution de (E) , Alors elle s'écrive sous la forme $(226k + 141 \,; 109k + 68)$.

Inversement,
Montrons que tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ qui s'écrivent sous la forme $(226k + 141 \,; 109k + 68)$ sont des solutions de l'équation (E) . En effet :

$$
\begin{aligned}
109(226k + 141) - 226(109k + 68) & \\
&= 24634k + 15369 - 24634k - 15368 \\
&= 15369 - 15368 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est défini implicitement par :

$$\mathcal{S} = \{ (\mathbf{226k + 141} \ ; \ \mathbf{109k + 68}) \, \epsilon \, \mathbb{Z}^2 \ ; \ \textit{avec } k \epsilon \mathbb{Z} \}$$

La Question : 1) c)

Soit $(d, e) = (141 + 226k\,; 68 + 109k)$; avec $k \epsilon \mathbb{Z}$

$$\left|\begin{array}{l} d \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \\ d \leq 226 \end{array}\right. \Rightarrow 0 \leq 141 + 226k \leq 226$$

$$\Rightarrow \frac{-141}{226} \leq k \leq \frac{226-141}{226}$$

$$\Rightarrow -0{,}62 \leq k \leq 0{,}37$$

$$\Rightarrow k \,\epsilon\, \mathbb{N} \cap [-0{,}62\,; 0{,}7]$$

$$\Rightarrow k \,\epsilon\, \{\,0\,\}$$

$$\Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 141 + 226k = 141 \\ e = 68 + 109k = 68 \end{cases}$$

La Question : 2)

Les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 227 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. On vérifie aisément que 227 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers. Donc 227 est un nombre premier.

La Question : 3) a)

$A = \{\,0\,; 1\,; 2\,; \cdots; 226\,\}$

$$f : \begin{array}{rcl} A & \longmapsto & A \\ a & \longmapsto & f(a) \equiv a^{109}[227] \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} A & \longmapsto & A \\ a & \longmapsto & g(a) \equiv a^{141}[227] \end{array}$$

$g(f(0)) \equiv (f(0))^{141}[227] \equiv (0^{109})^{141}[227] \equiv 0[227]$

D'où : $g(f(0)) = 0$

La Question : 3) b)

Soit a un élément de $A\backslash\{0\}$. On a 227 est un nombre premier, et il est premier avec a.
sinon, on aura : ou bien 227 divisera a qui est plus petit que lui, ou bien a divisera le nombre premier 227 avec $a \neq 227$ ☹. Alors $a \wedge 227 = 1$.
D'où, à l'aide du théorème de Fermat,
On conclut que : $a^{227-1} \equiv 1[227]$.
C-à-d que : $a^{226} \equiv 1[227]$. ☺

La Question : 3) c)

Soit a un élément de .

$$\begin{aligned} g(f(a)) &\equiv (f(a))^{141}[227] \\ &\equiv (a^{109})^{141}[227] \\ &\equiv a^{109\times141}[227] \\ &\equiv a^{1+226e}[227]\ ;\ selon\ 1)c) \\ &\equiv a(a^{226})^e[227] \\ &\equiv a(1)^e[227]\ ;\ selon\ 3)b) \\ &\equiv a[227] \end{aligned}$$

D'où : $g(f(a)) = a$

De même : $f(g(a)) \equiv (g(a))^{109}[227]$

$$\begin{aligned} &\equiv (a^{141})^{109}[227] \\ &\equiv a^{141\times109}[227] \\ &\equiv a^{1+226e}[227]\ ;\ selon\ 1)c) \\ &\equiv a(a^{226})^e[227] \\ &\equiv a(1)^e[227]\ ;\ selon\ 3)b) \\ &\equiv a[227] \end{aligned}$$

D'où : $f(g(a)) = a$

La Question : 3) d)

f et g sont deux bijections de A dans A.
l'une est l'inverse de l'autre.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$I_1 = \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)}_{u}\, dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u'\, dx$$

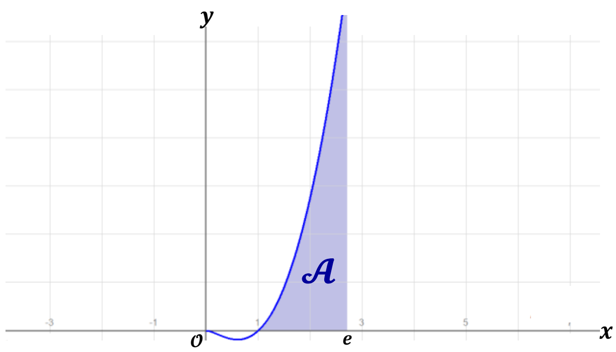
$$= \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2e^3 + 1}{9}$$



La Question : 1) b)

$$I_{p+1} = \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)^{p+1}}_{u}\, dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u'\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3 (\ln x)^{p+1}}{3}\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{(p+1)(\ln x)^p}{x}\right) dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right)\int_1^e x^2 (\ln x)^p\, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$$

La Question : 1) c)

$$I_2 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{1+1}{3}\right) I_1 \qquad\qquad I_3 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2+1}{3}\right) I_2$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) \qquad\qquad = \frac{e^3}{3} - \frac{5e^3}{27} + \frac{2}{27}$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} \qquad\qquad = \frac{4e^3+2}{27}$$

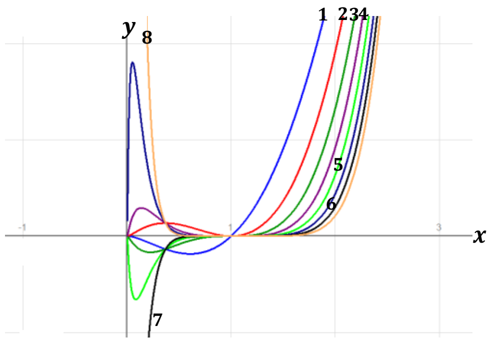
$$= \frac{5e^3-2}{27}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
1 \le x \le e \quad &\Longrightarrow \quad 0 \le \ln x \le 1 \\
&\Longrightarrow \quad 0 \le (\ln x)^p \le 1 \quad ; \quad p \ge 1 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^p(\ln x - 1) \le 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^{p+1} - (\ln x)^p \le 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^{p+1} \le (\ln x)^p \\
&\Longrightarrow \quad x^2(\ln x)^{p+1} \le x^2(\ln x)^p \\
&\Longrightarrow \quad \int_1^e x^2(\ln x)^{p+1}\,dx \le \int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx
\end{aligned}$$

$$car\ 1 < e\ \ et\ la\ continuité\ de\ x^2(\ln x)^p\ est\ vérifiée$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad I_{p+1} \le I_p \quad ; \quad p \ge 0 \\
&\Longrightarrow \quad la\ suite\ \left(I_p\right)_{p\ge1}\ est\ \ décroissante
\end{aligned}$$



La Question : 2) b)

Soit x un élément de $[1,e]$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 1 \le x \le e \\
&\Longrightarrow \quad 0 \le \ln x \le 1 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{p\infty}(\ln x)^p = 0
\end{aligned}$$

$$car\ c'est\ une\ suite\ géométrique\ (q^n)$$
$$dont\ la\ raison\ q\ est\ inférieure\ strictement$$
$$à\ 1\ en\ valeur\ absolue\ |\ln x| < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{p\infty} x^2(\ln x)^p = 0$$

On a aussi les fonctions $x^2(\ln x)^p$ sont toutes continues. et cette suite de fonctions converge vers la fonction continue 0 donc :

$$\lim_{p\infty}\int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx = \int_1^p\left(\lim_{p\infty} x^2(\ln x)^p\right)dx$$

$$C-à-d \ : \ \lim_{p\infty}\left(I_p\right) = \int_1^e 0\,dx = 0$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim_{x\to(-1)^+}\left(1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=x+1}}\left(1 + \underbrace{(t-1)^2}_{\substack{t\to0^+\\ 1}} - 2(t-1)\underbrace{t\ln t}_{\substack{t\to0^+\\ 0}}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} + 1 - 2\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} + 1\right)\underbrace{\ln(1+x)}_{+\infty}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (+\infty)\left(0 + 1 - 2(0+1)(+\infty)\right) \\
&= (+\infty)(-\infty) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

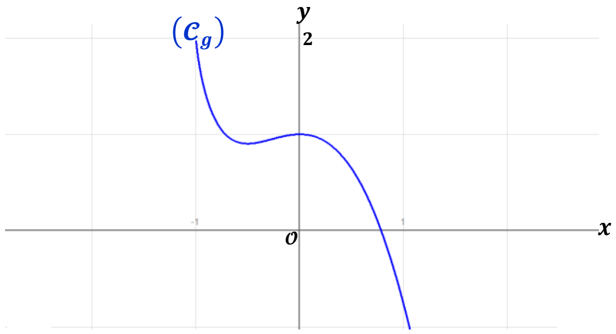
La Question : I) 2)

La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme étant une composition de sommes et produits de fonctions usuelles dérivables sur $]-1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x - \left((2x+2x^2)\ln(1+x)\right)' \\
&= 2x - \left((4x+2)\ln(1+x) + \frac{2x(1+x)}{(1+x)}\right) \\
&= -(4x+2)\ln(1+x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -(4x+2)\ln(1+x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (4x+2) = 0\ \ oubien\ \ \ln(1+x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1}{2} \quad oubien \quad x = 0
\end{aligned}$$

x	-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$4x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(1+x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	2	$\searrow$	$0{,}9$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



La Question : I) 3)

La fonction g est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ dans son image $g(\,]0,+\infty[\,)$ car g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
Selon le tableau ci-dessus On a :

$$g(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ; g(0)\right[=]-\infty,1[$$

Ainsi g est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,1[$.
c-à-d : $\forall\, y \in\,]-\infty,1[\ ;\ \exists!\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ g(x) = y$

Comme 0 est un élément de $]-\infty,1[$.
Alors il existe un seul antécédent α dans $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. A l'aide d'un petit calcul,
On aura : $g(1) \simeq -0{,}77$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}64$.
Et on remarque que $-0{,}77 < 0 < 0{,}64$.
Donc $g^{-1}(0{,}64) < g^{-1}(0) < g^{-1}(-0{,}77)$.
car g et g^{-1} sont toutes décroissantes.
Alors $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=x+1}} (\ln t)\left(\frac{1}{t^2-2t+2}\right)$$
$$= (-\infty)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=x+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2-2t+2}\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)\left(\frac{1}{t-2+\frac{2}{t}}\right)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{+\infty}\right)$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

La Question : II) 2) a)

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\left(\frac{1}{1+x}\right) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

Etant donné que $(1+x^2)^2 > 0$ toujours,
et $(1+x) > 0$ $pour\ tout\ x \in\,]-1,+\infty[$.
Donc : $signe(f'(x)) \equiv signe(g(x))$; $\forall\, x \in\,]-1,+\infty[$

x	-1		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$					$+$				0		$-$		
f	$-\infty$				$\nearrow$				$f(\alpha)$		$\searrow$		0

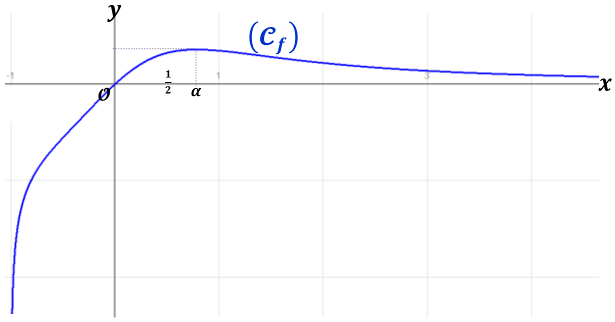
La Question : II) 2) b)

Je sais que $g(\alpha) = 0$.
donc : $1+\alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow\ 1+\alpha^2 = 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)$ $(\odot)$

$$Ainsi\ :\ f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \frac{\ln(1+\alpha)}{2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$

La réduction par α est légale ,
car $\ln(1+\alpha) \neq 0$. $(ie\ \alpha \neq 0)$

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Pour calculer cette intégrale on aura besoin de la formule trigonométrique suivante :

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times tanb}$$

Par un procédé de changement de variables on pose : $t=\frac{\pi}{4}-x$

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \iff t=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{4} \iff t=0 \\ dt=-dx \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan x) &= \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan t}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan t}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\tan t+1-\tan t}{1+\tan t}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) \\
&= \ln 2-\ln(1+\tan t)
\end{aligned}$$

Donc : $$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\ln 2-\ln(1+\tan t))\,(-dt) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan t))\,dt \\
&= \left(\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt \\
&= \left(\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-I
\end{aligned}$$

$$Ainsi\ :\ I=\frac{\pi\ln 2}{4}-I \iff 2I=\frac{\pi\ln 2}{4} \iff I=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

La Question : III) 2)

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ du Domaine demandé à laide de l'intégrale ci-dessous :

$$\mathcal{A}=\int_0^1\left|\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right|dx=\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)dx$$

On pose $t=\arctan x \iff \tan t=x$

$$Alors\ :\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \iff dx=(1+x^2)dt$$

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \iff t=0 \\ x=1 \iff t=\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
Ainsi\ :\ \mathcal{A} &= \int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\ln(1+\tan t)}{1+x^2}\right)(1+x^2)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt \\
&= \left(\frac{\pi\ln 2}{8}\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \\
&= \left(\frac{\pi\ln 2}{8}\right)cm^2
\end{aligned}$$