LYCEE GENERAL LECLERC
Département de Mathematiques
www.easy-maths.org

Baccalauréat Blanc
Session de Mars 2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Série : C ; Durée : 4h ; Coef : 5

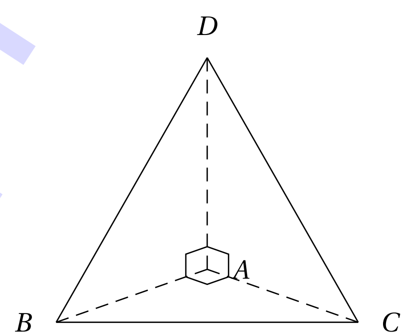
Exercice 1 : (3 pts)

1. Calculer PGCD(2688 ;3024). (0,5 pt)
2. On donne l'équation $(E) : 8x+9y=-10$.
   a. Vérifier que $(1;-2)$ est solution de (E). (0,25 pt)
   b. Résoudre l'équation (E). (0,75 pt)
3. $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$est un repère orthogonal de l'espace. $(S) : x+2y-z+2=0$ et $(\pi) : 3x-y+5z=0$ deux plans.
   a. Montrer que (S) et (π) sont sécants suivant une droite (D). (0,5 pt)
   b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (E). (0,5 pt)
   c. En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 pts)

I. $a \in \mathbb{R}_+^*$; $ABCD$ est un tétraèdre tel que $AB = AC = AD = a$. ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.

1. Quelle est la nature du triangle BCD? (0,25 pt)
2. Soit H le centre de gravité du triangle BCD.
   a. Justifier que (AH) est orthogonal au plan (BCD). (0,5 pt)
   b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$; puis l'aire S du triangle BCD. (0,75 pt)
   c. Exprimer AH en fonction de V et S et en déduire que $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (0,5 pt)
   d. Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{AH}$. (0,5 pt)



II. On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarque que, lorsque on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et les trois autres sont visibles).

1. Calculer la probabilité qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur le tétraèdre. (0,5 pt)
2. Calculer la probabilité que la couleur bleue ne soit visible sur aucun des trois tétraèdres. (0,5 pt)
3. Calculer la probabilité de l'événement E : «les six faces rouges sont visibles». (0,5 pt)
4. On repète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   a. Calculer la probabilité P_n que l'événement E soit réalisé au moins une fois. (0,75 pt)
   b. Calculer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0,25 pt)

Exercice 3 : (2 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et $3i$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de $3i$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-i}{iz+3}$.

1. Vérifier que $OM' = \dfrac{AM}{BM}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. (0,75 pt)
2. Déterminer et construire l'ensemble (E) image par f des points de la droite d'équation $y = 2$. (0,5 pt)
3. Déterminer et construire l'ensemble (F) image par f des points du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B. (0,5 pt)

Problème : (10 pts) (Ce problème comporte 3 parties indépendantes.)

Partie A : (3 pts)

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application f d'écriture complexe $z' = i\bar{z} + i$.

1. Montrer que $f = t \circ r \circ s$, s étant la reflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$, r la rotation de centre O d'angle à préciser et t la transformation de vecteur $\vec{u}$ à déterminer. (1,5 pts)
2. En décomposant r, montrer que $r \circ s$ est une symétrie orthogonale d'axe (D) à déterminer. (0,5 pt)
3. Vérifier que f est une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,5 pt)

Partie B : (3 pts)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y" + y = 0$. (0,5 pt)
2. Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, où f' désigne la dérivée de f.
   - **a.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E. (0,75 pt)
   - **b.** Soit f un élément de E. Vérifier que pour tout réel x, $f"(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$. (0,5 pt)
   - **c.** En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle $y" + y = 0$. (0,5 pt)
   - **d.** Déterminer alors l'ensemble E. (0,75 pt)

Partie C : (4 pts)

Soit $f : \begin{array}{ccl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x \end{array}$ une fonction.

1. **a.** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)
   - **b.** Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité : 5 cm). (0,5 pt)
2. **a.** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$, puis en déduire $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\, dx$ et $\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. (1 pt)
   - **b.** Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.
     - **i.** En utilisant le sens de variation de f sur $]0;1]$, montrer que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a : (0,5 pt)
     $$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$
     - **ii.** En déduire que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ et que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (1 pt)
   - **c.** En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$. (0,25 pt)