Session de contrôle Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-t,t\in\mathbb{R}.\\z=3\end{cases}$

b) $M(x,y,z)\in(S)\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3\\x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3\\t^2-2t+4=0\end{cases}$ or l'équation

$t^2-2t+4=0$ n'a pas de solution car $t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$ donc $\Delta\cap(S)=\varnothing$.

3) a) $B\notin\Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P.

b) $0+0+3-3=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

$3+0+0-3=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

Soit $C(1,-1,3)$ un point de Δ différent de A et $1-1+3-3=0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation $x+y+z-3=0$.

c) $d(I,P)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ donc P et S sont tangent en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D:\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1,\alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$

$H(x,y,z)\in D\cap P\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1\\z=\alpha\\x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\y=\alpha-1\\z=\alpha\\3\alpha-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\x=2\\y=0\\z=1\end{cases}$, il en résulte que $H(2,0,1)$.

Exercice 2

1) a) $\Delta=2(1-i)^2+16i=12i=6(1+i)^2$.

b) $\Delta=6(1+i)^2$, soit $\delta=\sqrt{6}(1+i)$, $z'=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{6}(1+i)}{4}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ et

$z''=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{6}(1+i)}{4}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})-i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}, \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} \right\}.$$

2) a) $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}z^2-2e^{-i\frac{\pi}{2}}z-2i=-2iz^2+2iz-2i=-2i\left(z^2-z+1\right)$.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1=e^{-i\frac{2\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0$,

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-e^{i\frac{\pi}{3}}+1=e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}+1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0$ et l'équation $z^2-z+1=0$ est une équation de second degré dans $\mathbb{C}$ donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2-z+1=0$.

d) D'après 2)b) z est une solution de l'équation $z^2-z+1=0$ si et seulement si $e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ est une solution de (E) et puisque $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2-z+1=0$, on en déduit que les solutions de (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ et comme $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)>0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)>0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Exercice 3

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.

La loi de X est donnée par $p(X=k)=C_{20}^{k}(0.1)^k(0.9)^{20-k}$, $k\in\{0,1,........,20\}$.

$p(A)=p(X=0)=(0.9)^{20}$.

b) $p(B)=1-p(\overline{B})=1-p(A)=1-(0.9)^{20}$.

c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est $E(X)=20\times0.1=2$.

2) a) les valeurs prises par Y sont $\{1,21\}$.

$p(Y=1)=p(A)=(0.9)^{20}$.

$p(Y=21)=p(B)=1-(0.9)^{20}$.

La loi de Y est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	21
$p(Y=y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1-(0.9)^{20}$

b) $E(Y)=\sum_{i=1}^{2}y_ip(Y=y_i)=1\times(0.9)^{20}+21\times\left(1-(0.9)^{20}\right)=18.56$.

Exercice 4

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{i})$ en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = -\infty.$

2) a) $\begin{cases} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x} \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$, il en résulte que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-x+1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}.$

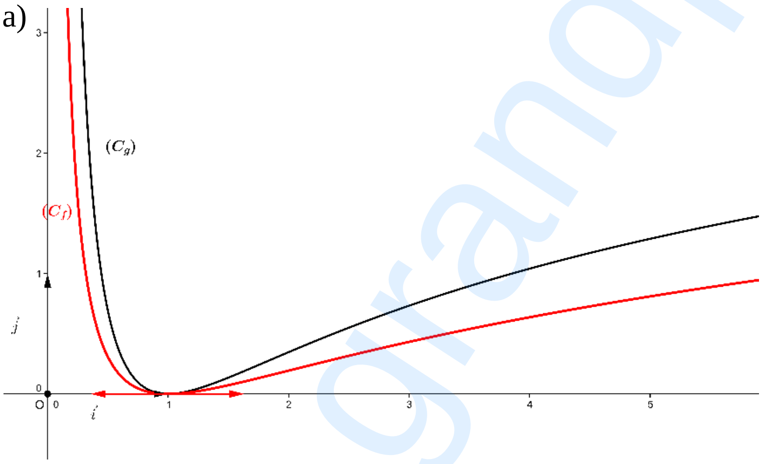
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

3) a) La fonction $g-f$ admet un minimum global sur $]0,+\infty[$ égal à 0 donc pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq f(x)$. Il en résulte que (C_g) est au-dessus de (C_f).

b) $M(a,f(a))$ et $N(a,g(a))$ donc $MN^2 = (g(a)-f(a))^2$, or $a>1$ donc $0<g(a)-f(a)<1$(d'après le tableau donné) d'où $0<(g(a)-f(a))^2<1$, il en résulte que $MN^2<1$ donc $MN<1$.

4) a)



b) pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x - \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln x - \ln x + \left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$= \ln x - \dfrac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}.$

c) $A = \int_1^e (g(x)-f(x))dx = \int_1^e \left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)dx = \left[x - \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \left(e-\dfrac{5}{2}\right)$ua.