

Examen du baccalauréat

Session de contrôle

Session de Juin 2014

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1I) 1)a) La courbe ζ de f passe par les points $O(0,0)$ et $B(1, 2e)$, d'où $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e$.b) La tangente en O à la courbe ζ est la droite (OA) , où $A(1,2)$.La droite (OA) a pour équation $y = 2x$. D'où $f'(0) = 2$.La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est horizontale, donc $f'(-1) = 0$.2) On a $f'(0) = 2$ et $f'(-1) = 0$.

- Dans la figure 1, l'image de 0 par la fonction est 1 . Donc cette courbe ne peut pas être celle de f' , car $f'(0) = 2$.
- La courbe dans la figure 2, est celle d'une fonction qui est toujours positive. D'autre part, par une lecture graphique de la courbe ζ de la fonction f , on peut remarquer que la fonction f est décroissante puis croissante donc f' change de signe. Ainsi cette courbe ne peut pas être celle de f' .

Par élimination, la courbe de f' est celle représentée dans la figure 3.II)1)a) $f(x) = 2xe^x; x \in \mathbb{R}$.La valeur exacte du minimum de f est $f(-1) = -2e^{-1} = \frac{-2}{e}$.b) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -0,7$ est le nombre de pointsd'intersection de la courbe ζ de f et la droite D d'équation $y = -0,7$. On a $-0,7 > \frac{-2}{e}$ donc la droite D coupe la courbe en deux points distincts. Ainsi l'équation admet deux solutions distinctes.2) $I = \int_0^1 f(x) dx$.a) L'intégrale I est l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe ζ de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

b) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2xe^x dx = 2 \int_0^1 xe^x dx$.

On pose : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

D'où $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

Ainsi $I = 2$.

c) On désigne par A , l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe ζ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 2e$.

$$A = \int_0^1 (2e - f(x)) dx = \int_0^1 2e dx - \int_0^1 f(x) dx = 2e - 1 = 2e - 2 = 2(e - 1) \text{ u.a.}$$

Exercice 2

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6 - u_n}{4 - u_n}$.

1)a) Montrons par récurrence que $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 0 < 2$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n . C'est-à-dire $u_n < 2$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n + 1$.

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6 - u_n}{4 - u_n} - 2 = \frac{6 - u_n - 2(4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{u_n - 2}{4 - u_n}.$$

On a $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$ et $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n - 2}{4 - u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n + 1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$b) u_{n+1} - u_n = \frac{6 - u_n}{4 - u_n} - u_n = \frac{6 - u_n - u_n(4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{u_n - 5u_n + 6}{4 - u_n} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n}.$$

c) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

$$\text{On a d'après la question précédente : } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n}.$$

D'autre part $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$, $u_n - 3 < 0$ et $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante.

d) On a $u_n < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{2u_n - 6}{u_n - 2}$.

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 2} = \frac{2 \frac{6 - u_n - 6}{4 - u_n} - 6}{\frac{6 - u_n - 6}{4 - u_n} - 2} = \frac{2(6 - u_n) - 6(4 - u_n)}{6 - u_n - 2(4 - u_n)} = \frac{4u_n - 12}{u_n - 2} = 2 \frac{2u_n - 6}{u_n - 2} = 2v_n.$$

On a $v_{n+1} = 2v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) $v_0 = \frac{2u_0 - 6}{u_0 - 2} = 3.$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 2.

D'où $v_n = 3 \times 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a : $v_n = \frac{2u_n - 6}{u_n - 2} \Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = 2u_n - 6.$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = 2u_n - 6$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - 2u_n = 2v_n - 6$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 2) = 2v_n - 6$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n - 6}{v_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{6 \times 2^n - 6}{3 \times 2^n - 2} = \frac{6 \times 2^n (1 - \frac{1}{2^n})}{2^n (3 - \frac{1}{2^n})} = \frac{6(1 - \frac{1}{2^n})}{3 - \frac{1}{2^n}} = \frac{6 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}.$$

Ainsi $u_n = \frac{6 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

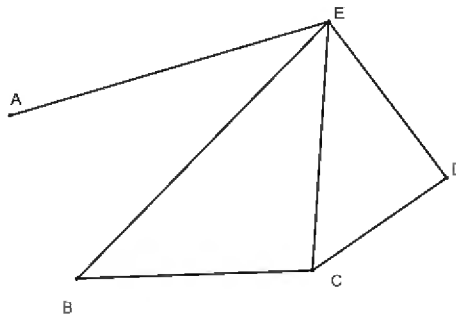
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \frac{6}{3} = 2$; car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0.$

Exercice 3

G un graphe de sommets A, B, C, D et E et dont la matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1)a) On peut remarquer que la matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale, donc le graphe G n'est pas orienté.
- b) L'ordre du graphe G (le nombre de sommets) est 5.



2)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	2	3	2	4

- 3)a) Un sous graphe complet d'ordre 3, du graphe G, est un sous graphe de G, d'ordre 3 et dont chaque sommet est adjacent aux deux autres.

On a les sous graphes E-C-D et E-B-C sont deux sous graphes complets de G, d'ordre 3.

- b) On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe G.

Le nombre chromatique $\gamma(G)$ du graphe G est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets, donc $\gamma(G) \geq 3$.

D'autre part le plus grand degré des sommets de G est 4 (degré de E), d'où $\gamma(G) \leq 4 + 1 = 5$. On a ainsi $3 \leq \gamma(G) \leq 5$.

- 4) On ordonne les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : E-C-B-D-A.

On attribue une couleur C_1 au sommet E. Tous les autres sommets sont adjacents à E, donc on ne peut pas attribuer cette couleur une autre fois. On attribue une couleur C_2 au sommet C, on peut attribuer cette couleur au sommet A puisqu'il n'est pas adjacent à C. On peut attribuer aux sommets B et D la même couleur C_3 . Ainsi $\gamma(G) = 3$.

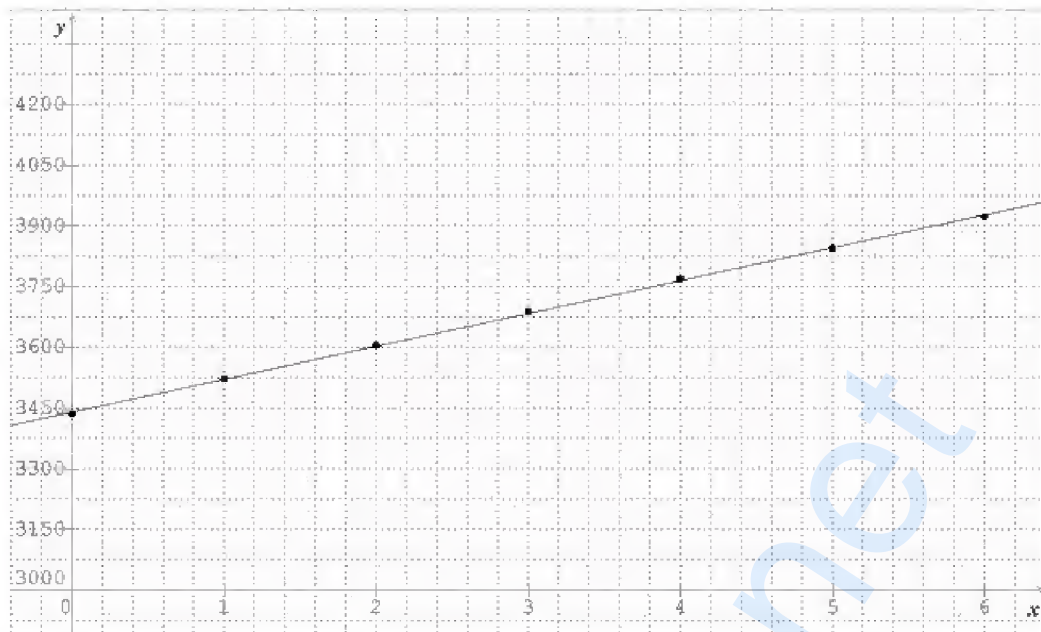
Exercice 4

L'évolution de la population active en Tunisie de 2006 à 2012 est donnée par la tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année (xi)	0	1	2	3	4	5	6
Population active en milliers (yi)	3435	3522	3604	3689	3769	3845	3923

Source : Institut National de Statistique (INS)

1)a) Le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) :



b) La forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

2)a) On utilisant la calculatrice on détermine les coefficients $a = 81,25$ et $b = 3440,107$.

La droite de régression de y en x a pour équation : $y = 81x + 3440$ (en arrondissant les coefficients à l'unité).

b) Voir figure.

c) Le rang de l'année 2015 est $x = 9$ donc $y = 81 \times 9 + 3440 = 4169$.

Une estimation de la population active de la Tunisie en 2015 est 4169 000.