

Exercice 1

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

$$1) a) u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{3} ; u_2 = \frac{u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}.$$

b) Montrons par récurrence que $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 1 > 0$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n . C'est-à-dire $u_n > 0$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$$\text{On a } u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+2u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0.$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$2) a) u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{-2u_n^2}{1+2u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) On a $u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$ et $-2u_n^2 < 0$

$$\Rightarrow \frac{-2u_n^2}{1+2u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est minorée par (-1) puisque $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3) a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\ell = \frac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell(1+2\ell) = \ell ; \ell \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

b) On a $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+2x}$.

La suite (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

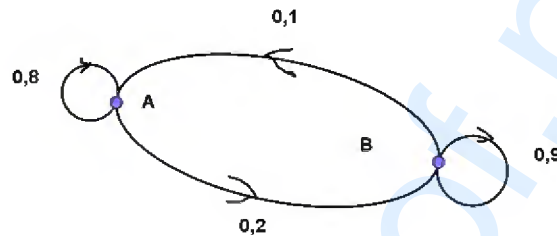
La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, d'où $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$. (d'après 3)a)). Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2

La matrice de transition associée au graphe G est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1) Le graphe G .



2)a) La probabilité qu'un affilié à la formule B garde la même formule l'année suivante est 0,9.

b) La probabilité qu'un affilié à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante est 0,1.

3) Soit $P_0 = (0,3 \ 0,7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial.

$$\begin{aligned} \text{On a } P_1 &= P_0 \times M = (0,3 \ 0,7) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ &= (0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 \quad 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,9) = (0,31 \ 0,69). \end{aligned}$$

4) Pour montrer que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice qui traduit l'état stable, il suffit de montrer que

$$P \times M = P.$$

$$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 0,8 + \frac{2}{3} \times 0,1 & \frac{1}{3} \times 0,2 + \frac{2}{3} \times 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = P.$$

D'où la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$.

$$1) a) \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 3 \times 4 + 2 \times 8 = 5.$$

$\det(M) \neq 0$, d'où la matrice M est inversible.

$$b) M \times N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$M \times N = I_3$, d'où $M^{-1} = N$. L'inverse de M est N .

$$c) (S) : \begin{cases} x + 4y + 2z = 110 \\ 3x + 2y + 3z = 120 \\ 2x + y + 2z = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110 + 6 \times 120 - 8 \times 75 \\ 0 \times 110 + 2 \times 120 - 3 \times 75 \\ 1 \times 110 - 7 \times 120 + 10 \times 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(10, 15, 20)\}$.

2)a) a , b et c les nombres (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées par les machines X, Y et Z travaillant en plein temps.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine X est $a + 4b + 2c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Y est $3a + 3b + 3c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Z est $2a + b + 2c$ heures.

D'autre part on a les capacités hebdomadaires, exprimés en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement 110, 120 et 75.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} a + 4b + 2c = 110 \\ 3a + 2b + 3c = 120 \\ 2a + b + 2c = 75 \end{cases} . \text{ Ce qui prouve que le triplet } (a, b, c) \text{ vérifie le système (S).}$$

b) Le triplet (a,b,c) vérifie le système (S), d'où $(a,b,c) = (10,15,20)$.

Ainsi $a = 10$, $b = 15$ et $c = 20$.

c) Le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent en plein temps est : $60a + 50b + 40c = 60 \times 10 + 50 \times 15 + 40 \times 20 = 2150$ dinars.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-2}{1+e^x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1)a) $f(0) = \frac{-2}{1+e^0} = -1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1+e^x} = -2$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1+e^x} = 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

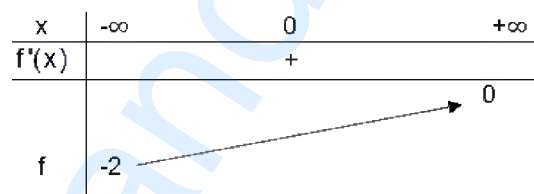
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ au voisinage de $(-\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f(x) = \frac{-2}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{2(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.



c) (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

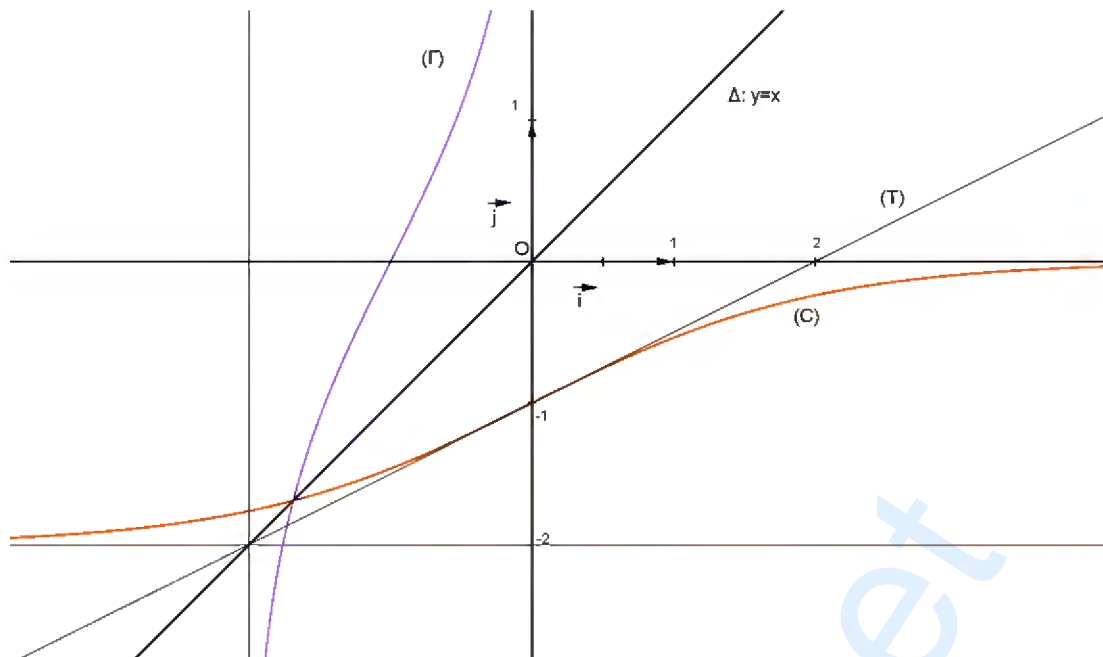
(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

(T) : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

d) Voir figure

3)a) La fonction f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , d'où elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[$.

b) Voir figure.



$$4) a) I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^{\ln 2} = \ln(1+e^{\ln 2}) - \ln(1+e^0) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

$$b) f(x) = \frac{-2}{1+e^x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{2e^x}{1+e^x} - 2 = \frac{2e^x - 2(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{-2}{1+e^x} = f(x).$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} - 2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

c) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} -f(x) dx = -\int_0^{\ln 2} \left(\frac{2e^x}{1+e^x} - 2 \right) dx = -2 \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^{\ln 2} 2 dx \\ &= -2 \ln \frac{3}{2} + [2x]_0^{\ln 2} = -2 \ln \frac{3}{2} + 2 \ln 2 = 2 \left(\ln \frac{2}{3} + \ln 2 \right) = 2 \ln \frac{4}{3} \text{ unité d'aire.} \end{aligned}$$