

Examen du baccalauréat

Session de contrôle

Session de Juin 2014

Section : Sciences de l'informatique

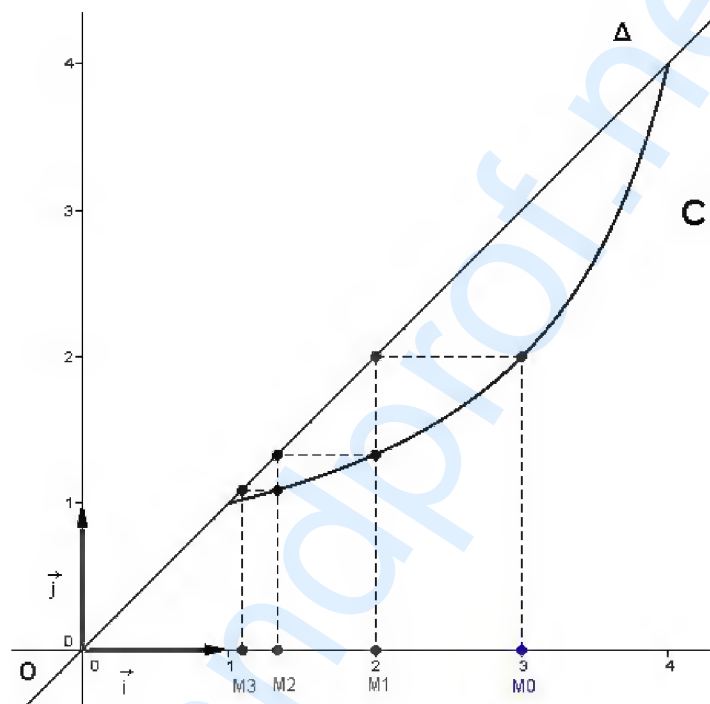
Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

$$1) f(x) = \frac{4}{5-x} ; x \in [1, 4].$$

(C) la courbe représentative de f , dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a)



b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, 4]$, d'où $f([1, 4]) = [f(1), f(4)] = [1, 4]$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) On considère les points $M_0(u_0, 0), M_1(u_1, 0), M_2(u_2, 0), M_3(u_3, 0)$.

Voir figure.

b) On remarque que les points $M_k(u_k, 0)$ s'approchent de plus en plus au point $I(1, 0)$, on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 1.

3)a) Montrons par récurrence que pour tout n , $1 \leq u_n \leq 4$.

- $1 \leq u_0 = 3 \leq 4$ d'où l'encadrement est vérifié pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'encadrement est vrai pour n . C'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 4$.
- Montrons que l'encadrement est vrai pour $n+1$.

$$\text{On a: } 1 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow u_n \in [1, 4]$$

$$\Rightarrow f(u_n) \in f([1, 4]); f([1, 4]) = [1, 4]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \in [1, 4]$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 4$$

D'où l'encadrement est vrai pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout n , $1 \leq u_n \leq 4$.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{4}{5 - u_n} - u_n \\ &= \frac{4 - u_n(5 - u_n)}{5 - u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 5u_n + 4}{5 - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{5 - u_n}. \end{aligned}$$

On a $1 \leq u_n \leq 4$, d'où $u_n - 1 \geq 0$, $u_n - 4 \leq 0$ et $5 - u_n > 0$.

Par suite $\frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{5 - u_n} \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) On a pour tout n , $1 \leq u_n$. D'où la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

Soit l la limite de cette suite. On a : $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[1, 4]$, d'où $l = f(l)$.

$$\begin{aligned} l = f(l) &\Leftrightarrow l = \frac{4}{5 - l} \\ &\Leftrightarrow l(5 - l) = 4 \\ &\Leftrightarrow l^2 - 5l + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (l - 1)(l - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 1 \text{ ou } l = 4 \end{aligned}$$

La suite est décroissante, donc $l = 1$.

Exercice 2

$$f(x) = (x-1)e^{2x} ; x \in \mathbb{R}.$$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (l'unité graphique 1 cm).

1)a) La fonction $x \mapsto x-1$ est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur \mathbb{R} , d'où f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}; x \in \mathbb{R}.$$

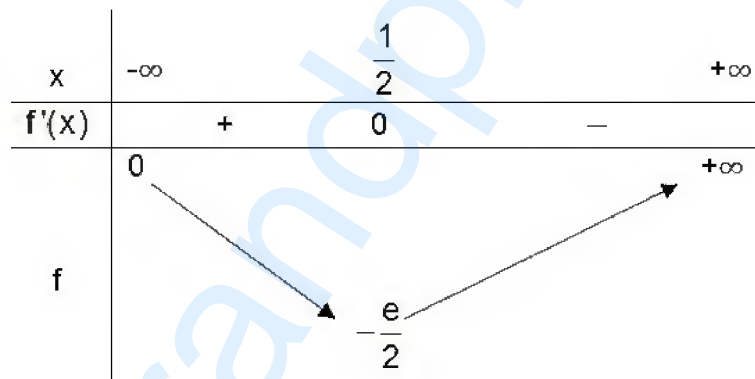
$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} - e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(2xe^{2x}) - e^{2x} = 0$$

D'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe (C) au voisinage de $(-\infty)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{2x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{2x} = +\infty.$$

D'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.

$$d) f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x} = 0 \\ \Leftrightarrow 2x-1=0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



2)a) T la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ y = e^2(x-1)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x > 1 \Leftrightarrow 2x > 2 \\ \Leftrightarrow e^{2x} > e^2$$

c) T: $y = e^2(x-1)$; (C): $y = f(x)$.

$$f(x) - e^2(x-1) = (x-1)e^{2x} - e^2(x-1) = (x-1)(e^{2x} - e^2).$$

$$x > 1 \Rightarrow (x-1 > 0 \text{ et } e^{2x} - e^2 > 0)$$

$$\Rightarrow f(x) - e^2(x-1) > 0$$

$$x < 1 \Rightarrow (x-1 < 0 \text{ et } e^{2x} - e^2 < 0)$$

$$\Rightarrow f(x) - e^2(x-1) > 0$$

D'où on a la courbe (C) est toujours au-dessus de sa tangente T

3a) $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$$
 ; $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Le signe de f'' est celui de $4x$. D'où f'' s'annule en changeant de signe en 0.

Par suite le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe (C).

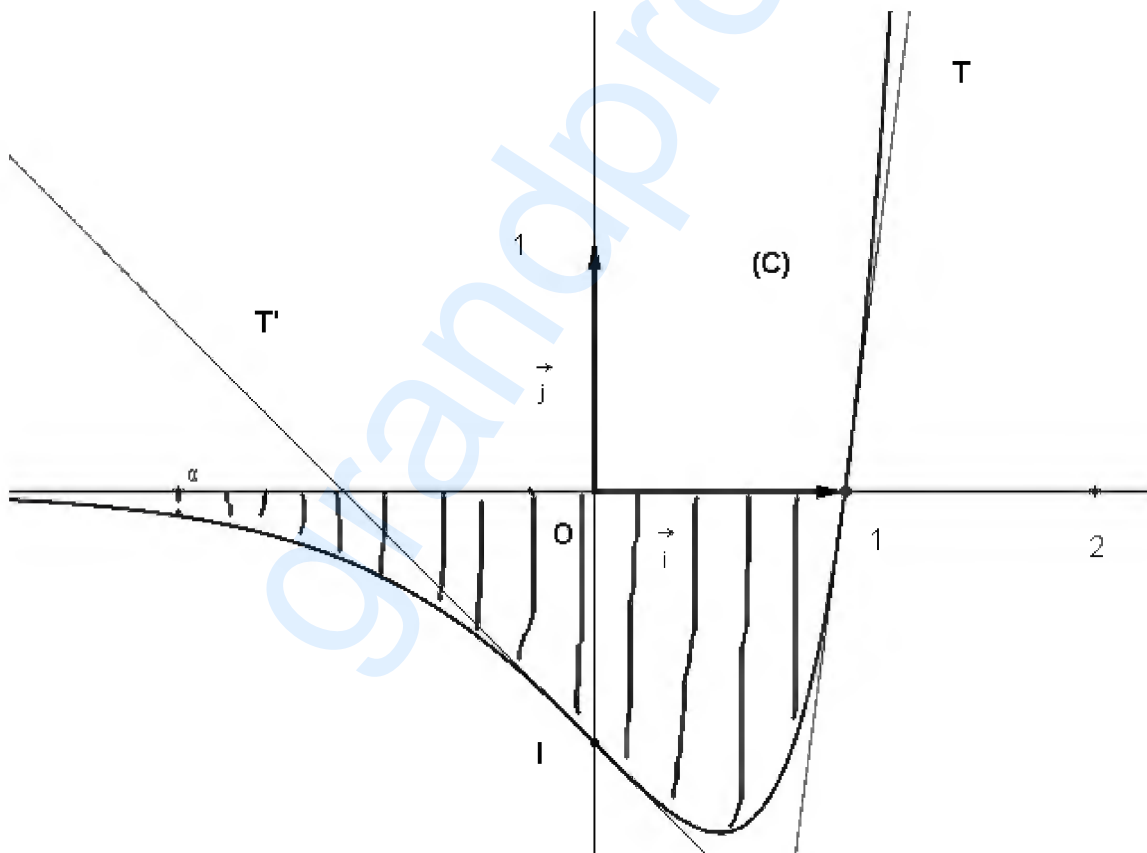
$I(0, -1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) T' la tangente à (C) au point I.

$$T': y = f'(0)x + f(0)$$

$$y = -x - 1$$

4) La courbe (C).



5) Soit α un réel négatif. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

$$a) A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 -f(x) dx = -\int_{\alpha}^1 (x-1)e^{2x} dx.$$

$$\text{On pose } u(x) = x-1 \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 e^{2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha-1)e^{2\alpha} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\alpha}^1 \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha-1)e^{2\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^{2\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \alpha e^{2\alpha} + \frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} e^{2\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \alpha e^{2\alpha} + \frac{3}{4} e^{2\alpha} - \frac{1}{4} e^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } A(\alpha) = -\int_{\alpha}^1 (x-1)e^{2x} dx = \frac{1}{2} \alpha e^{2\alpha} - \frac{3}{4} e^{2\alpha} + \frac{e^2}{4} \text{ cm}^2.$$

$$b) \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \alpha e^{2\alpha} - \frac{3}{4} e^{2\alpha} + \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{4}; \text{ car } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{2\alpha} = 0.$$

Exercice 3

On peut résumer les données dans ce schéma :

$$25 \text{ élèves} \begin{cases} 15 \text{ filles} & \begin{cases} 9 \text{ ont une moyenne en maths supérieure à } 10 \\ 6 \text{ ont une moyenne en maths inférieure ou égale à } 10 \end{cases} \\ 10 \text{ garçons} & \begin{cases} 7 \text{ ont une moyenne en maths supérieure à } 10 \\ 3 \text{ ont une moyenne en maths inférieure ou égale à } 10 \end{cases} \end{cases}$$

Une épreuve consiste à choisir au hasard deux élèves de cette classe.

$$\text{Le nombre de choix possibles est } C_{25}^2 = \frac{25!}{2!23!} = \frac{25 \times 24}{2} = 25 \times 12 = 300.$$

1) L'évènement A : « Chacun des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10 »

a) Dans cette classe, il y a 16 élèves qui ont une moyenne en mathématiques supérieure à 10. D'où $p(A) = \frac{C_{16}^2}{300} = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$.

b) L'évènement B : « Les deux élèves choisis sont des filles »

$$\text{Il y a 15 filles dans cette classe. D'où } p(B) = \frac{C_{15}^2}{300} = \frac{105}{300} = \frac{7}{20}.$$

c) $p(B/A)$: est la probabilité que les deux élèves choisis soient des filles sachant qu'ils ont une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

$$\text{On a } p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

L'événement $A \cap B$: « Les deux élèves choisis sont des filles qui ont des moyennes en mathématiques supérieures à 10 ». D'où $p(A \cap B) = \frac{C_9^2}{300} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{25} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{10}.$$

2) X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'élèves ayant une moyenne en mathématiques supérieure à 10, parmi les deux élèves choisis au hasard.

$$\text{On a } X(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

- ($X = 0$): aucun des deux élèves choisis n'a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

$$p(X = 0) = \frac{C_9^2}{300} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}.$$

- ($X = 1$): l'un seulement des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

$$p(X = 1) = \frac{C_{16}^1 \times C_9^1}{300} = \frac{16 \times 9}{300} = \frac{12}{25}.$$

- ($X = 2$): Chacun des deux élèves choisis, a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

$$p(X = 2) = \frac{C_{16}^2}{300} = \frac{120}{300} = \frac{10}{25}.$$

La loi de probabilité de X se résume dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{10}{25}$

3) On répète l'épreuve suivante cinq fois de suite.

On se propose de déterminer la probabilité que l'évènement A soit réalisé au moins trois fois. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois que l'évènement soit réalisé. Y suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{5}$.

$$p(Y = k) = C_5^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{5-k}; \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

($Y \geq 3$): L'évènement A est réalisé au moins trois fois.

$$\begin{aligned}
 p(Y \geq 3) &= p(Y = 3) + p(Y = 4) + p(Y = 5) \\
 &= C_5^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right) + C_5^5 \left(\frac{2}{5}\right)^5 \\
 &= 10 \times \frac{2^3 \times 3^2}{5^5} + 5 \times \frac{2^4 \times 3}{5^5} + \frac{2^5}{5^5} = \frac{(10 \times 2^3 \times 3^2) + (5 \times 2^4 \times 3) + 2^5}{5^5} = \frac{992}{3125}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 2 \times (-3) = -2.$$

$\det(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

$$2) B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times I_3.$$

$$A \times B = 2 \times I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{2}B\right) = I_3.$$

$$\text{D'où la matrice inverse de A est la matrice } A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3)a) Pour un séjour de 24 heures, un hôtel a trois tarifs différents :

- Le tarif x pour les enfants de moins 12 ans.
- Le tarif y pour les enfants de 12 à 18 ans.
- Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

Famille 1, a payé 200 dinars et elle est composée du père de la mère et de 3 enfants d'âges 7, 10 et 15. On a donc : $2x + y + 2z = 200$.

Famille 2, a payé 290 dinars et elle est composée du père de la mère et de 5 enfants d'âges 4, 8, 13, 15 et 18. On a donc : $2x + 2y + 3z = 290$.

Famille 3, a payé 130 dinars et elle est composée de la mère et de deux enfants de 13 et 16 ans. On a donc : $2y + z = 130$.

On a ainsi le système (S)
$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 200 \\ 2x + 2y + 3z = 290 \\ 2y + z = 130 \end{cases}$$

b)

$$(S) \begin{cases} 2x + y + 2z = 200 \\ 2x + 2y + 3z = 290 \\ 2y + z = 130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 \times 200 - \frac{3}{2} \times 290 + \frac{1}{2} \times 130 = 30 \\ y = 200 - 290 + 130 = 40 \\ z = -2 \times 200 + 2 \times 290 - 130 = 50 \end{cases}$$

D'où les tarifs sont : $x = 30$ dinars, $y = 40$ dinars et $z = 50$ dinars.