

MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques

Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BO}) \equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$$\text{Le rapport de } f \text{ est } \frac{OB}{AI} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

b) $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, il en résulte que D est le centre de f .

2) a) $[AC]$ est un diamètre de (ζ) et $E \in (\zeta) \setminus \{A, C\}$ donc $(CE) \perp (AE)$ et $(BH) \perp (AE)$ donc $(BH) \parallel (CE)$, or (CE) passe par J le milieu de $[AB]$ et coupe $[AH]$ en E , il en résulte que E est le milieu de $[AH]$.

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EH} = -EA \times EH = -EA^2.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = EA \cdot EB \cdot \cos(\widehat{AEB}) = EA \cdot EB \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB.$$

$$\text{car } (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

3) a) Le rapport de g est $\frac{EA}{EB} = \frac{EH}{\sqrt{2}EH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Le triangle OEB est isocèle donc son image par g est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle $O'EA$ est isocèle.

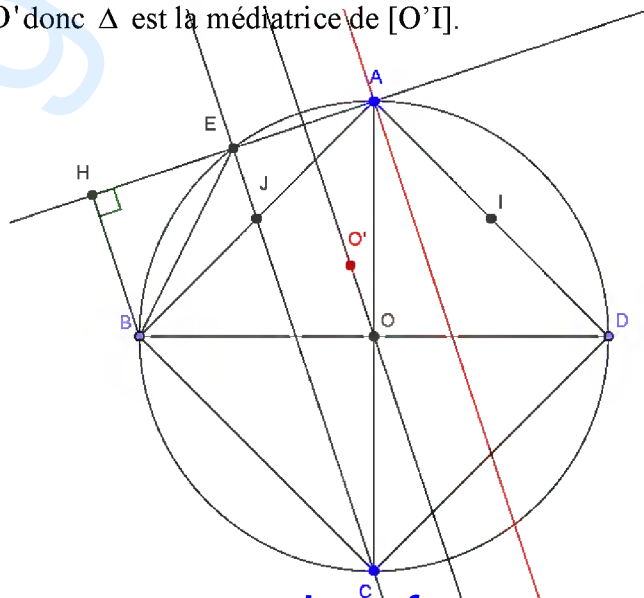
c) On sait que $f(A) = B$ et $f(I) = O$ donc $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$ de plus

$$g(B) = A \text{ et } g(O) = O' \text{ donc } AO' = \frac{1}{\sqrt{2}}OB, \text{ il en résulte que } O'A = AI.$$

4) S est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ est d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc

S est une similitude indirecte de rapport 1 donc S est un antidéplacement.

$S(A) = g(f(A)) = g(B) = A$, il en résulte que S est une symétrie orthogonale d'axe Δ qui passe par O de plus $S(I) = g(f(I)) = g(O) = O'$ donc Δ est la médiatrice de $[O'I]$.



Exercice 2 (Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace)

- 1) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$, on en déduit que S est la sphère de centre $I(0, 3, 2)$ et de rayon 2.
 b) Il suffit de vérifier que $A \in S$, $B \in S$ et I est le milieu de $[AB]$.
- 2) a) La cote du point I est 2 donc $I \in P$ par suite S coupe P suivant le cercle Γ de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de $[AB]$, donc $[AB]$ est un diamètre de Γ .
 b) $IA = 2$, $JA = 4$ et $IJ = 6$ donc $IA + JA = IJ$ par suite Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .
- 3) a) Le rayon de S' est égal à $\frac{5}{2} \times 2 = 5$. On pose $I'(x, y, z)$,

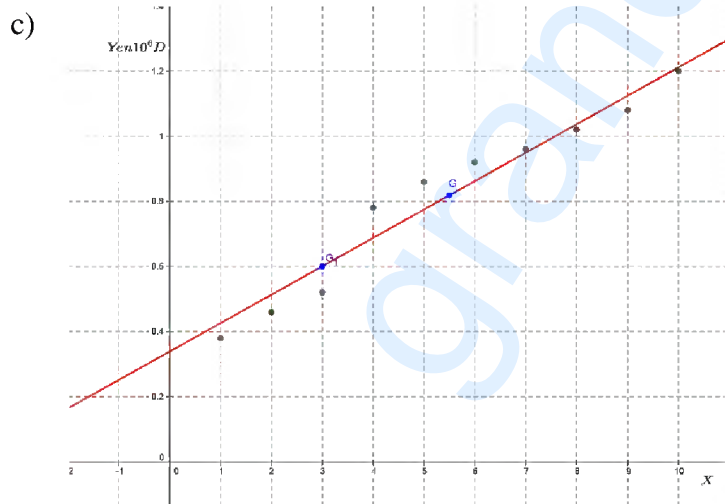
$$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'} = \frac{5}{2} \overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -10 \\ y - 3 = 0 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I'(-6, 3, 5).$$

 b) $d(I', P) = 3 < 5$ donc S' coupe P suivant un cercle de rayon $\sqrt{25 - 9} = 4$ et de centre le projeté orthogonal de I' sur P , or J est un point de P et $\overrightarrow{I'J} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I' sur P , il en résulte que P coupe S' suivant le cercle Γ' .
 c) $A \in S \cap (EA)$ donc $h(A) \in S' \cap (EA) = \{A, A'\}$ or $h(A) \neq A$ donc $h(A) = A'$.
 B est le point diamétralement opposé à A sur S donc $h(B)$ est le point diamétralement opposé à A' sur S' , on en déduit que $h(B) = B'$ par suite E, B et B' sont alignés.

Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

- 1) a) $G(\overline{X}, \overline{Y})$ donc $G(5.5, 0.818)$.

b) $G_1(3, 0.6)$.



d) $a = \frac{0.6 - 0.818}{3 - 5.5} = 0.09$ donc $(GG_1): y = 0.0872x + b$ or $G_1 \in (GG_1)$

donc $0.6 = 0.09 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 0.33$, il en résulte que $(GG_1): y = 0.09x + 0.33$.

e) Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.77$.

2) a) $r = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = 0.987$.

b) $Z = bX + a$ avec $b = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sigma_X^2} = 0.2$ et $a = \bar{Z} - b\bar{X} = 1.23$. Ainsi $Z = 0.2X + 1.23$

c) $Z = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow e^Y = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow Y = \ln(0.2X + 1.23)$. Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.488399584$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)

I. 1) a) Pour tout $t > 0$, $u'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{2+3t}{(1+t)^2} > 0$.

x	0	$+\infty$
$u'(t)$		+
u	0	$\longrightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3 \ln(1+t) - \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = +\infty.$$

b) $u(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ donc $u(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x = 0 = f'_d(0)$$
 donc f est dérivable à droite en 0.

b) Pour tout $x \in]0, 1]$, $f'(x) = 3x^2 [\ln(1+x) - \ln x] + x^3 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right]$

$$= x^2 \left[3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = x^2 u \left(\frac{1}{x} \right).$$

c) On a $u(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$ d'où $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
f	0	$\longrightarrow \ln 2$

II. 1) Pour tout $x \in]0, 1]$, $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2 (3 \ln x + 1)$.

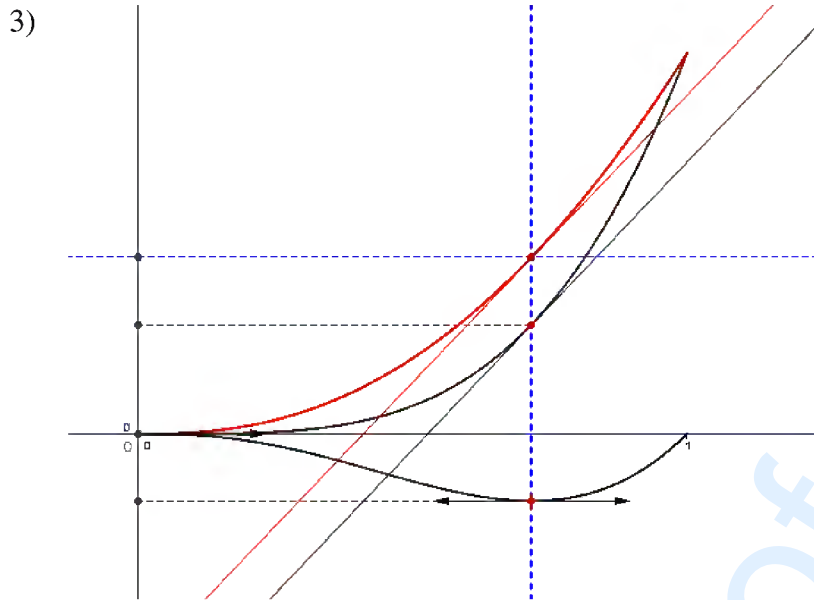
Pour tout $x \in]0, 1]$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$. On en déduit que (C_h) admet une tangente

horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$ et $f(0) = g(0) - h(0)$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$ donc (C_f) est au-dessus de (C_g) et les points $(0,0)$ et $(1, \ln 2)$ sont des points d'intersection.

c) $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc $T \perp T'$.



4) a) La fonction h est continue sur $[0,1]$ donc elle admet une unique primitive H qui s'annule en 1.

b) $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$.

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A(\alpha) = \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} [x^4]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \alpha^4.$$

d) $H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -A(\alpha) = \frac{1}{16}$.

e) $A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 h(x) dx = H(0) = \frac{1}{16}$.