Exercice 1

$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{Un+2Vn}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{Un+3Vn}{4} \end{cases}$

$W_n = U_n - V_n$

1) a- Calcul des 3 premiers termes :

$U_1 = 1$

$V_1 = 4$

$W_1 = V_1 - U_1$

$= 4 - 1 \rightarrow W_1 = 3$

$U_2 = \frac{U1+2V1}{3}$

$= \frac{1+2(4)}{3} \rightarrow U2 = 3$

$V_2 = \frac{u1+3V1}{4}$

$= \frac{1+3(4)}{4} \rightarrow V_2 = \frac{13}{4}$

$W_2 = V_2 - U_2$

$= \frac{13}{4} - 3 \rightarrow W_2 = \frac{1}{4}$

$U_3 = \frac{U2+2V2}{3}$

$= \frac{3+2(\frac{13}{4})}{3} \rightarrow U3 = \frac{19}{6}$

$V_3 = \frac{U2+3V2}{4}$

$= \frac{3+3(\frac{13}{4})}{4}$

$= \frac{3+\frac{39}{4}}{4}$

$= \frac{51}{4}\ x\ \frac{1}{4}$

$V_3 = \frac{51}{16}$

$W_3 = V_3 - U_3$

$= \frac{51}{16} - \frac{19}{6}$

$= \frac{306-304}{96}$

$W_3 = \frac{2}{96} \rightarrow W3 = \frac{1}{48}$

b) Montrons que W_n est une suite géométrique

W_n est une suite géométrique si $\frac{W_{n+1}}{W_n} = q$

$W_n = V_n - U_n$

$= \frac{Un+1}{4} - \frac{Un+2Vn}{3}$

$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$

$= \frac{Un+1}{4} - \frac{Un+2Vn}{3}$

$= \frac{3Un+9Vn-4Un-8Vn}{12}$

$$W_{n+1} = \frac{Vn - Un}{12}$$

$$\frac{W_{n+1}}{Wn} = \frac{\frac{Vn-Un}{12}}{Vn - Un}$$

$\frac{Vn+1}{Wn} = \frac{1}{12}$ donc W_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et de premier terme $W_1 = 3$

c) Expression de W_n en fonction de W_n

$Wn = W_k q^{n-1}$

$Wn = 3\ (\frac{1}{12})^{n-1}$

$Wn = 3\ (\frac{1}{12})^{n}\ x\ (\frac{1}{12})^{-1}$

$Wn = 36\ (\frac{1}{12})^{n}$

2) Démontrons que U_n est une suite croissante

U_n est croissante si $U_{n+1} - U_n > 0$

$U_{n+1} - U_n = \frac{Un+2Vn}{3} - Un$

$= \frac{2Vn-2Un}{3}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}(V_n - U_n) = \frac{2}{3}\ Wn$

$= \frac{2}{3}(36(\frac{1}{12})^n$

$= 24\ (\frac{1}{12})^n\ or\ (\frac{1}{12})^n > 0\ \forall\ n\varepsilon\mathbb{N}\ d'où$

$24\ (\frac{1}{12})n\ > 0.\ on\ déduit$

$U_{n+1} - U_n > 0$ donc U_n est une suite croissante

Démontrons que V_n est une suite décroissante

V_n est décroissante si $V_{n+1} - V_n < 0$

$V_{n+1} - V_n = \frac{Un+3Vn}{4} - Vn = \frac{Un+3Vn-4Vn}{4}$

$= \frac{-Vn+Un}{4} = \frac{-1}{4}\ (Un - Vn)$

$= \frac{-1}{4}\ (Wn)$ or $Wn > 0$

Donc $\frac{-1}{4}$ Wn <0 d'où $V_{n+1} - V_n < 0$ donc V_n est une suite décroissante

3) $t_n = 3U_n + 8V_n$

Démontrons que t_n est une suite constante

$t_n = 3U_{n+1} + 8V_{n+1} - 3U_n - 8V_n$

$= \frac{3(Un+2Vn)}{3} + 8\ \frac{Un+3Vn}{4} - 3U_n - 8V_n$

$= U_n + 2V_n + 2U_n + 6V_n - 3U_n - 8V_n$

$t_{n+1} - t_n = 0$ donc t_n est une suite constante

Exo 2

$$f(P) = \frac{20}{ln10}\ln(5000P)$$

1) a- Le niveau sonore pour une pression de : P=2

$$f(P) = \frac{20}{ln10}\ln(5000P)$$

$$f(2) = \frac{20}{ln10}\ln(5000\text{x}2)$$

$f(2)$ =80 décibels

P= 0,2

$$f(0{,}2) = \frac{20}{ln10}\ln(5000\text{x}0{,}2)$$

$f(0{,}2)$ = 60 décibels

P=0,02

$f(0{,}02)$ = 40 décibels

b) Calcul de $f(P_o)$: $Po = 20.10^{-6}$

$f(20.10^{-6}) = \frac{20}{ln10}\ ln\ (5000\text{x}20.10^{-6})$

$f(x)\ (20.10^{-6}) = \frac{20}{ln10}\ ln\ (5000\text{x}20.10^{-6})$

$f(20.10^{-6}) = -20$ décibels

2) La pression P correspondant au niveau sonore de 120 décibels

$f(P) = 120 \rightarrow = \frac{20}{ln10}\ ln\ (5000\ P) = 120$

$20\ ln\ 5000P = 120ln10$

$ln\ 5000P = 6ln\ 10$

$ln\ 5000P = ln\ 10^6$

$5000P = 10^6$

P = 200 Pascal

Montrons que pour tout $x \geq Po$

$f(10x) = 20 + f(x)$

$f(P) = \frac{20}{ln10}ln(5000\ P)$

$f(10x) = \frac{20}{ln10}ln(5000\ \text{x}10x)$

$= \frac{20}{ln10}[ln(5000x\ \text{x}\ 10)]$

$= \frac{20}{ln10}\ [ln5000x+ln10]$

$= \frac{20}{ln10}ln5000x+\frac{20ln10}{ln10}$

$f(x) + 20$ d'où

$f(10x) = 20 + F(x)$

4) Exprimons pour tout $x \geq Po$ $f(100x)$ en fonction de $f(x)$

$f(100x) = \frac{20}{ln10}ln\ (5000x\ \text{x}\ 100x)$

$= \frac{20}{ln10}\ [ln5000x\ \text{x}\ 100]$

$= \frac{20}{ln10}\ln(5000x)+\frac{20}{ln10}\ (ln100)$

$= \frac{20}{ln10}ln\ (5000x)+\frac{20}{ln10}\ (2ln100)$

$= \frac{20}{ln10}\ln(5000x) +40$

$F(100x) = 40 + f(x)$

Propriété: le niveau sonore augmente de 40 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 100.

PROBLEME

$$f(x) = \frac{2e^x - 5}{e^x + 3}$$

1) L'ensemble de définition :

Df = $\{x\varepsilon\ IR\ e^x+3\neq 0\}$

Posons e^x+3 = 0 impossible

Df=IR

2) a- Calcul de la limite en -∞

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = \left(\frac{2e^x - 5}{e^x + 3}\right)$$

$\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = \frac{-5}{3}$car $e^x\to 0$

b) Montrons que $f(x) = \frac{2-5e^{-x}}{1+3e^{-x}}$

$\frac{2-5e^{-x}}{1+3e^{-x}} = \frac{2-5(\frac{1}{e^x})}{1+3(\frac{1}{e^x})}$

$= \frac{2e^x-5}{e^x}$ x $\frac{e^x}{e^x+3}$

$\frac{2-5e^{-x}}{1+3e^{-x}} = \frac{2e^x-5}{e^x+3}$ d'où

$$f(x) = \frac{2 - 5e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}$$

c) Déduction de la limite de f en +∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2 - 5e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ car $e^{-x}\to 0$

d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-5}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

alors les droites d'équation y = $\frac{-5}{3}$ et y = 2 sont des asymptotes horizontales à (Cf)

3) La dérivée f' de f

f est dérivable sur Df

$$f(x) = \frac{2e^x - 5}{e^x + 3}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 3) - e^x(2e^x - 5)}{(e^x + 3)^2}$$

$$f(x) = \frac{11e^x}{(e^x + 3)^2}$$

Signe de f'(x) et sens de variation de f.

$\forall\ x\ \varepsilon(Df)$ $(e^x+3)^2 > 0$ et $11e^x > 0$ d'où $\forall\ x\ \varepsilon(Df)$ f'(x) > 0

$\forall\ x\ \varepsilon(Df)$ f'(x) > 0 donc f est strictement croissante sur IR.

Tableau de variation

- ∞ +

∞

F'(x)	+
f(x)	2

4) L'équation de la tangente à l'origine $\to x_o=0$

(T) : y = f' (x_o) $(x-x_o)$ + f (x_o).

y = f' (x_o) (x) + f (x_o)

f'(o) = $\frac{11e^0}{(e^0+3)^2} = \frac{11}{16}$

f(o) = $\frac{2e^0-5}{e^0+3} = \frac{2-5}{1+3}$

f(o) = $\frac{-3}{4}$

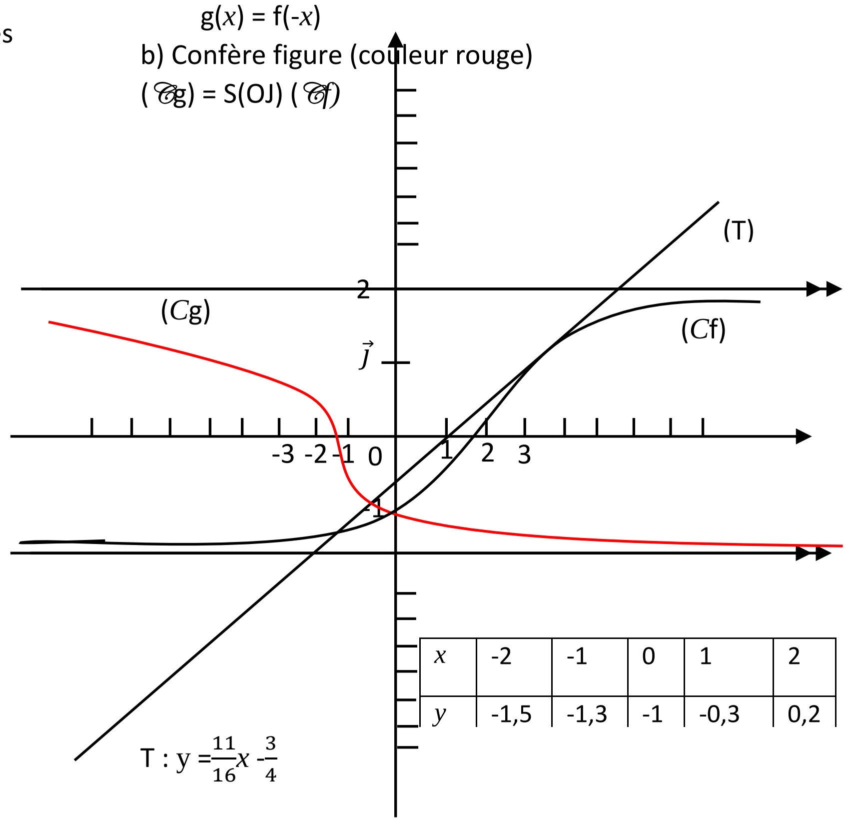
(T) y = $\frac{11}{16}x - \frac{3}{4}$

5) a- Expression de g(x) en fonction de f(x).

g(x) = f(-x)

b) Confère figure (couleur rouge)

($\mathscr{C}$g) = S(OJ) ($\mathscr{C}$f)



x	-2	-1	0	1	2
y	-1,5	-1,3	-1	-0,3	0,2