

Mathématiques
Economie et gestion
Corrigé de la session principale Juin 2013

Exercice 1

1) Le graphe G est complet. **Faux**

Les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe G n'est pas complet.

2) La matrice associée au graphe G est la matrice M. **Faux**

Dans le graphe G, il y a une arête qui relie les sommets B et D.

3) Le graphe G admet un cycle eulérien. **Faux**

Il existe des sommets de degré impair donc G n'admet pas un cycle eulérien.

Les sommets C et E sont de degré impair.

4) Le graphe G admet une chaîne eulérienne. **Vrai**

Il existe exactement deux sommets de degré impair (C et E), donc le graphe G admet une chaîne eulérienne.

5) Le nombre chromatique du graphe G est égal 4. **Vrai**

Sommet	B	D	C	E	A
degré	4	4	3	3	2
couleur	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₃

6) La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est égale 11. **Faux**

La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est 10. Les chemins les plus courts sont : A-B-E-C et A-D-E-C.

Exercice 2

Dans une ville 20% des habitants possèdent un ordinateur.

- 90% des individus possédant un ordinateur utilisent l'Internet.
- 60% des individus n'ayant pas d'ordinateur utilisent l'Internet.

On choisit au hasard un individu de cette ville et on désigne par A et B les événements suivants :

A : « L'individu choisi possède un ordinateur »

B : « L'individu choisi utilise l'Internet ».

1) Dans cette ville 20% possèdent un ordinateur alors la probabilité que l'individu choisi

possède un ordinateur est $p(A) = \frac{20}{100} = 0.2$; $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

90% des individus possédant un ordinateur utilisent l'internet, alors la probabilité que l'individu choisi utilise l'internet sachant qu'il possède un ordinateur est

$p(B/A) = \frac{90}{100} = 0.9$. On a $p(\bar{B}/A) = 1 - p(B/A) = 1 - 0.9 = 0.1$

60% des individus n'ayant pas d'ordinateur utilisent l'Internet, alors la probabilité que l'individu choisi utilise l'internet sachant qu'il ne possède pas un ordinateur est

$$p(B/\bar{A}) = \frac{60}{100} = 0.6.$$

$$2)a) p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B/A) = 0.2 \times 0.9 = 0.18.$$

$$p(B \cap \bar{A}) = p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A}) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

$$b) p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = 0.18 + 0.48 = 0.66.$$

3) La probabilité que l'individu choisi possède un ordinateur sachant qu'il utilise l'internet est

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.18}{0.66} = \frac{3}{11} \approx 0.27$$

Exercice 3

$$1)a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ = 2 \times (6 - 4) - (10 - 6) + (10 - 9) = 1.$$

b) $\det(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

$$c) B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

d) $B \times A = I_3$, d'où $A^{-1} = B$

B est la matrice inverse de A.

2) Un concessionnaire d'automobiles expose trois modèles M_1, M_2 et M_3 .

On pose x, y et z les prix, respectivement, du modèle M_1, M_2 et M_3 .

- La commande de la société 1 s'élève à 270 milles dinars soit :
2 automobiles du modèle M_1 , donc à un coup de $2x$ milles dinars
5 automobiles du modèle M_2 , donc à un coup de $5y$ milles dinars
3 automobiles du modèle M_3 , donc à un coup de $3z$ milles dinars
On a donc $2x + 5y + 3z = 270$.
- La commande de la société 2 s'élève à 165 milles dinars soit $x + 3y + 2z = 165$
- La commande de la société 3 s'élève à 140 milles dinars soit $x + 2y + 2z = 140$

La situation se résume par le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 270 \\ x + 3y + 2z = 165 \\ x + 2y + 2z = 140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 270 \\ x + 3y + 2z = 165 \\ x + 2y + 2z = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Ainsi le prix d'une automobile du modèle M_1 est de 20 milles dinars, le prix d'une automobile du modèle M_2 est de 25 milles dinars et le prix d'une automobile du modèle M_3 est de 35 milles dinars.

Exercice 4

f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x e^{1-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} e = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe C de f au voisinage de $+\infty$.

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

D'où la courbe C de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

$$2) a) f(x) = x e^{1-x}.$$

$$f'(x) = e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$b) f'(x) = (1-x)e^{1-x}, x \in \mathbb{R}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

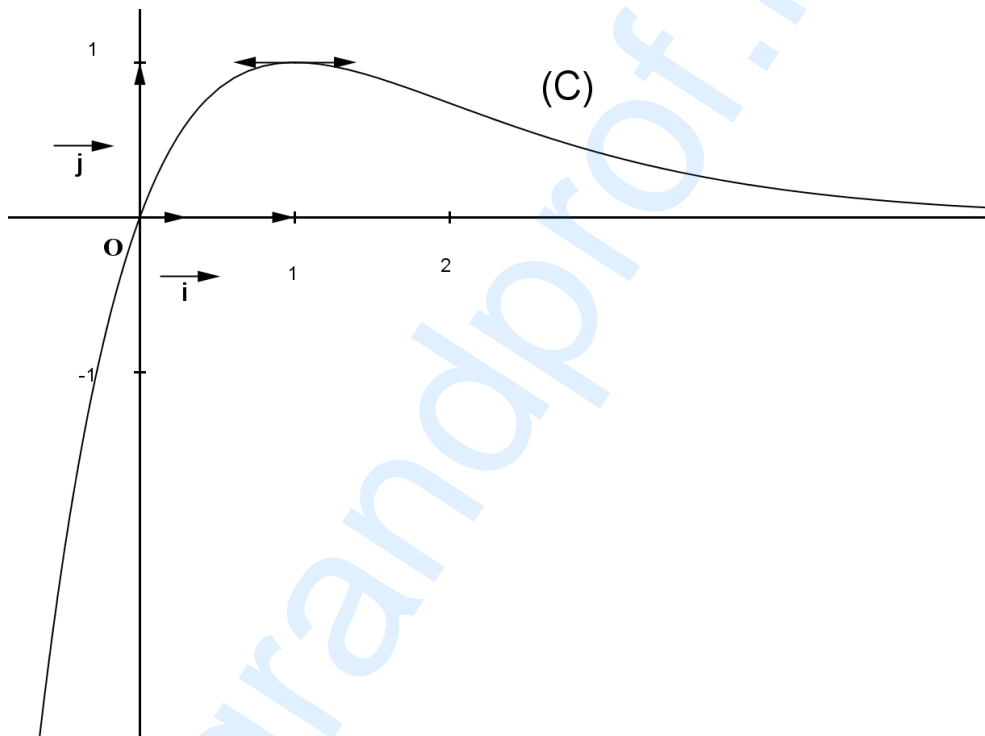
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	0

c) On peut remarquer que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et en particulier elle est strictement croissante sur $[0, 1]$. D'où on a :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) ; \text{ or } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \\ \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Ainsi pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$.

3) La courbe C de f :



4) (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } 0 < a < 1, \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

- $u_0 = a$ avec $0 < a < 1$, d'où $0 \leq u_0 \leq 1$. Ainsi la proposition est vérifiée pour $n = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition est vraie pour k , c'est-à-dire $0 \leq u_k \leq 1$.

- Montrons que la proposition est vraie pour $k+1$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } 0 \leq u_k \leq 1 &\Rightarrow u_k \in [0, 1] \\ &\Rightarrow 0 \leq f(u_k) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1 \end{aligned}$$

D'où la proposition est vraie pour $k+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence on a :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } u_n \leq 1 &\Rightarrow -u_n \geq -1 \\ &\Rightarrow 1 - u_n \geq 0 \\ &\Rightarrow e^{1-u_n} \geq e^0 \\ &\Rightarrow e^{1-u_n} \geq 1. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{1-u_n} \geq 1$.

- c) Montrons que la suite (u_n) est croissante, pour cela calculons $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n e^{1-u_n} - u_n = u_n (e^{1-u_n} - 1).$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n (e^{1-u_n} - 1).$$

D'après ce qui précède on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{1-u_n} \geq 1$ et $u_n \geq 0$, d'où

$u_{n+1} - u_n = u_n (e^{1-u_n} - 1) \geq 0$, par conséquent $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi la suite (u_n) est croissante.

- d) D'après 4)a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, d'où la suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Soit l sa limite.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc $l = f(l)$.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow l e^{1-l} = l \\ &\Leftrightarrow l(1 - e^{1-l}) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 - e^{1-l} = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } e^{1-l} = 1 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 - l = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1. \end{aligned}$$

On a la suite (u_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ d'où la limite l ne peut pas être 0, donc $l = 1$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.