

VISION DU FUTUR: VFⁱ

Honnêteté et travail pour un futur propre



VISION du FUTUR
Honnêteté & Travail pour un Futur Propre

LIEU : ECOLE PRIMAIRE LA SOLIDARITE

Epreuve de
MATHEMATIQUES

EXAMEN TEST

Classe : 1^{le} D

MAI 2019

Durée : 3h00

Coeff : 4

Exercice 1

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie A :

Une urne contient dix boules : deux bleues, cinq noires, trois rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise, au hasard, et on note dans l'ordre le résultat obtenu. Calculer la probabilité de l'événement : « tirer une boule bleue au deuxième tirage ».

Partie B :

Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire deux boules successivement.

Dans chacun des cas suivants calculer la probabilité des événements A et B suivants :

- A « obtenir un tirage bicolore »
- B « obtenir un tirage monocolore »

1. On remet la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la seconde.
2. On ne remet pas la première boule tirée dans l'urne.

Exercice 2

les deux parties sont indépendantes

Partie A :

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2 e^{-x}$. On pose $K = \int_0^1 h(x) dx$. Montrer que $K = 2 - \frac{5}{e}$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}}$. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$
 - a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$
 - b. Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0,1]$, $1 - u \leq \frac{1}{1 + u} \leq 1 - \frac{u}{2}$
 - c. En déduire que $1 - K \leq I \leq 1 - \frac{K}{2}$
 - d. Donner un encadrement de I d'amplitude $0,1$.

Partie B :

On considère la suite d'intégrales : $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$; $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$... , $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$

1.
 - a. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$; en déduire I_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , calculer $I_{n+1} + I_n$
2.
 - a. Montrer sans calculs que la suite (I_n) est croissante.
 - b. Prouver que pour tout élément x de $[0,1]$, $\frac{e^{nx}}{e + 1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}$
 - c. En déduire un encadrement de I .
 - d. A partir de cet encadrement, donner la limite de I_n et celle de $\frac{I_n}{e^n}$

Exercice 3

1. Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$. Déterminer toutes les solutions de (E).
2. On note (E') l'équation différentielle $2y' + 3y = x^2 + 1$
 - a. Déterminer une fonction f , polynôme du second degré, solution de (E').
 - b. Démontrer que si g est solution de (E'), alors $g - f$ est solution de (E).
 - c. Réciproquement, démontrer que si $g - f$ est une solution de (E), alors g est solution de (E').
 - d. Déterminer toutes les solutions de (E')
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $2y' + 3y = \cos x$

Problème

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$
 ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée.

Partie A :

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$
 - a. Quelle est la limite de g lorsque x tend vers 1 ?
 - b. Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 1$
 - c. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x - 1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$
 - d. Étudier le sens de variation de g .
 - e. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle $[e + 1, e^3 + 1]$ et étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. On note γ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $\gamma(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \gamma(x)$ et prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 0$
 - b. Calculer $\gamma'(x)$ et démontrer que $\gamma'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$
 - c. Démontrer que γ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$

Partie B :

1. Vérifiez que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \gamma(e^x)$
2. Déduisez - en
 - a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
 - b. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
 - c. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$
 - d. que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$
3. Tracez la courbe ζ

IL FAUT ESSAYER DE FAIRE UN PETIT PEU PLUS QUE CE DONT ON CROIT ETRE CAPABLE