COMPOSITION FIN 2^{e} TRIMESTRE 2019
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
CLASSE DE TLE D 4H

EXERCICE 1 /2pts

On pose $I=\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos^2 x\,dx,\ J=\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin^2 x\,dx$

1)Calculer I + J. (0,5pt)

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x+\sin 2x)$

a)Calculer f'(x) (0,5pt)

b) En déduire I – J puis I et J. (1pt)

EXERCICE 2 /4pts

Soit l'équation différentielle (E) ; $y''-3y'+2y=-x^2+x+2$

1)Trouver un polynôme du second degré solution de (E) (1pt)

2) On pose $f(x)=g(x)-\frac{1}{2}x^2-x$. Montrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si g est solution de l'équation (E') : $y''-3y'+2y=0$ (1pt)

3)Résoudre (E') et en déduire les solutions sur IR de (E) (1pt)

4)Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative dans un repère $(o,\ \vec{i},\vec{j})$ passe par le point de coordonnées (0 ; 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1. (1pt)

EXERCICE 3 /4pts

Soit la suite (Un) définie par Uo=1 et $\forall n\in$ IN, $U_{n+1}=\frac{4U_n}{1+U_n}$

1) Dans le plan muni du repère (O, I, J), utiliser la représentation graphique de la fonction $f : x\mapsto \frac{4x}{1+x}$ pour représenter sur l'axe (OI) les quatre premiers termes de la suite (U_n) (1,5pt)
2) a) Utiliser cette représentation pour conjecturer si la suite (Un) est majorée, minorée ou bornée et le sens de variation de (U_n) (0,5pt)
   b) Démontrer ces conjectures. (1,5pt)
   c) Que peut-on dire de la suite U ? (0,25pt)
   d) Calculer la limite de la suite U. (0,5pt)

PROBLEME /10pts

PARTIE A /2pts

Soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=e^x+x+1$

1)Etudier le sens de variation de h et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
(0,5 + 0,25 X 2)pt

2) Montrer que l'équation h(x)=0 admet dans IR une solution unique α et que l'on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$. (0,5 + 0,25)pt

3) En déduire le signe de h(x) lorsque x décrit IR. (0,25pt)

PARTE B **/5,25pts**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et ($\mathcal{C}$) sa représentation dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) (unité de longueur graphique : 4cm)

1.a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(e^x + 1)^2}$ (0,5pt)

b) En déduire le sens de variation de f. (0,25pt)

X 2) α étant la solution de l'équation h(x)=0 trouvée à la deuxième question de la partie A, montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ (0,25pt)

3)On désigne par (T) la tangente à ($\mathcal{C}$) en son point d'abscisse O.

a) Déterminer l'équation réduite de (T) (0,25pt)

b) Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (T) (0,5pt)

4.a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (0,75pt)

b) Démontrer que la droite (D) d'équation y =x est asymptote à ($\mathcal{C}$) (0,5pt)

c) Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D) (0,5pt)

5) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

6)Placer sur un même graphique, ($\mathcal{C}$) , (D) et (T) (1pt)

PARTIE C /2,75pts

Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par $g(x)=\ln(1+e^x)$

Soit (Γ) la représentation graphique de g dans le repère (o, $\vec{i}, \vec{j}$) défini dans la partie B. Soit I(1 ; 0), A le point de (Γ) d'abscisse O et B son point d'abscisse 1.

1)Etudier les variations de g. (1,25pt)

2) Déterminer une équation de la tangente en A à (Γ) (0,5pt)

X 3) On note P le point d'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA. (1pt)

COMPOSITION DU MOIS DE JANVIER 2019
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
CLASSE DE TLE D 3H

EXERCICE 1 /6pts

1)Résoudre dans IR :

a)$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$ (1,25pt)

b)$\ln x + \ln(2x - e) = 2$ (1,25pt)

2)Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x-3)^2}$

a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout $x \in IR \setminus \{3\}$,

$f(x) = a + \dfrac{b}{x-3} + \dfrac{c}{(x-3)^2}$ (1pt)

En déduire la primitive F de f sur $]-\infty ; 3[$ telle que : F(2)=5 (1pt)

3)Résoudre dans IR² le système $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$ (1,5pt)

EXERCICE 2 /6pts

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} - 2$

1)Déterminer l'ensemble de définition D de f. (0,25pt)

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D. (0,5pt)

3) a)Montrer que la droite d'équation x =1 est un axe de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$) de f. En déduire un ensemble d'étude E de f. (1,25pt)

b) Etudier les variations de f sur E et dresser son tableau de variation. (2pts)

4)Etudier les branches infinies de ($\mathcal{C}$) et tracer ($\mathcal{C}$) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 2cm) (2pts)

5)Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}}$ Déterminer la primitive de g qui s'annule en 2.

EXERCICE 3 /8pts

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

a)Etudier f et dresser son tableau de variation. (2,5pts)

b) Calculer f(0) ; en déduire le signe de f. (0,5pt)

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x\ln|x - 1|$

a) Etudier g et tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$)

b) Soit A le point d'intersection de ($\mathcal{C}$) et (OI) d'abscisse non nulle. Démontrer que A est un point d'inflexion de ($\mathcal{C}$) et écrire une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) en A. (3,5pts)

3)On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1 ; +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur une partie de IR que l'on déterminera et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de h et h^{-1}. (1,5pt)