| Collège Jean Tabi d'Etoudi<br>Département de Mathématiques<br>B.P. 4174 Yaoundé<br>Tel/fax : 222 21 60 53 | SESSION INTENSIVE<br>DE FEVRIER 2019 | Année scolaire 2018-2019<br>Classe : TD<br>Durée : 4h<br>Coef : 4 |
|---|---|---|



# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

**Exercice I : 2,5pts**

Soit $z$ un nombre complexe différent de 1.

a) Comparer $|z-1|$ $et$ $|\bar{z}-1|$. 0,5pt

b) On pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$. Déterminer $|z'|$. 0,5pt

On appelle $A$ , $B$ , $M$ $et$ $M'$ les points du plan complexe d'affixes respectives : $1$; $-1$ ; $z$ $et$ $z'$.

c) Calculer en fonction de $z$ et $\bar{z}$ le nombre $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que $r$ est réel. 0,75pt

d) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ $et$ $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires. 0,75pt

**Exercice II : 3,75pts**

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que $(u_n)$ est majorée par 4. 0,75pt

b) Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante. 0,75pt

c) En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite. 0,75pt

2) a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ , on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis) 1pt

b) Retrouver le résultat de la question 1)c) 0,5pt

**Problème : 13,75pts**

Dans tout le problème, $(C)$ désigne la courbe d'équation $y = lnx$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4cm.

En annexe est représentée le tracé de la courbe $(C)$ et de la droite (D) d'équation $y = x$.

**Partie A : 2,75pts**

1) a) Déterminer une équation de la tangente $(\Delta)$ à $(C)$ au point I d'abscisse 1. 0,25pt

b) Etudier les variations de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 - lnx$ 0,75pt

c) En déduire la position relative de $(C)$ par rapport à $(\Delta)$. 0,75pt

2) a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - lnx$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. 0,5pt

b) $M$ $et$ $N$ sont les points de même abscisse $x$ des courbes $(C)$ et (D) respectivement. Déterminer la plus petite valeur (Exprimée en cm ) prise par la distance $MN$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. 0,5pt

**Partie B** : 6pts

1) Soit $M$ le point d'abscisse $x$ de la courbe$(C)$. Exprimer la distance $OM$ de l'origine à $M$ en fonction de $x$. 0,5pt

2) **Etude de la fonction auxiliaire définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par $u(x) = x^2 + lnx$**
   a) Justifier les limites de $u(x)$ *en* 0 *et en* $+\infty$ ainsi que le sens de variation de $u$. 1pt
   b) Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. 0,25pt
   c) Montrer que $\alpha$ est comprise entre 0,5 *et* 1 puis donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$. 0,5pt
   d) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.0,25pt

3) **Etude de la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + (lnx)^2$**
   a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$ 0,75pt
   b) En déduire le tableau de variation de $g$. 1pt

4) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(C)$ et en donner une valeur approchée exprimée en cm en utilisant pour $\alpha$ la valeur centrale de l'encadrement trouvée à la question 2)c). 1pt

5) A étant le point d'abscisse $\alpha$ de $(C)$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA). 0,75pt

**Partie C** : **5ptsEtude d'une suite**

1) Montrer que le réel $\alpha$ définie dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$ où $h$ est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + lnx)$. 0,5pt

2) a) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. 0,5pt

b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ 0,25pt

c) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. 0,5pt

d) En déduire que , pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$. 0,5pt

3) On définit la suite $(u_n)$ par : $u_0 = 1$ *et* pour tout entier naturel, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et que la suite $(u_n)$ est décroissante 1pt

b) En utilisant l'inégalité des accroissements, montrer que l'on a pour tout entier naturel $n$ ,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$ . 1pt

c) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$. 0,25pt

d) Déterminer un entier $n_0$ tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$près et indiquer la valeur $u_{n_0}$ donnée par la calculatrice (avec 5 décimales) 0,5pt

| | | |
|---|---|---|
| Collège Jean Tabi d'étoudi<br>Département de mathématiques<br>BP : 4174 Yaoundé-Cameroun<br>N/Réf : CJT/18-19/DH/AB/SKEM | DEVOIR HARMONISE<br>DU MOIS<br>DE JANVIER 2019 | Année scolaire : 2018-2019<br>Séquence : 3<br>Classe : TD<br>Durée : 4h-Coefficient : 4 |

EKEO

EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU MERCREDI 09 JANVIER 2019

**EXERCICE I (06.5 points)**

**NB** : *Cet exercice propose cinq questions indépendantes. Les énoncés I, II, III et IV vous propose chacune quatre réponse dont une seule est juste.* ***Choisir après justification la bonne réponse****. Dans l'énoncé V, il vous est demandé de compléter les pointillés par le mot, l'expression ou le nombre qui convient*

I. Le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^{495}$ est : **(1pt)**

**R₁)** Un nombre imaginaire pur — **R₂)** Un nombre réel strictement positif

**R₃)** Un nombre réel strictement négatif — **R₄)** Egal à $495+495i\sqrt{3}$

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z|^2+z+\bar{z}=8$ est : **(1pt)**

**R₁)** Une droite — **R₂)** Une hyperbole

**R₃)** Une parabole — **R₄)** Un cercle

III. En chimie le « PH » : potentiel d'hydrogène est défini par $PH=-log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions $H_3O^+$ exprimée en mol/l d'une solution aqueuse et $log$ est le logarithme décimal. Si la concentration d'une solution aqueuse est divisée par 100 alors **(1pt)**

**R₁)** Son PH augmente de 10 — **R₂)** Son PH augmente de 2

**R₃)** Son PH diminue de 10 — **R₄)** Son PH diminue de 2

IV. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$. L'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ est : **(1pt)**

**R₁)** $y=x+\frac{1}{2}$ — **R₂)** $y=-x+\frac{1}{2}$

**R₃)** $y=x-\frac{1}{2}$ — **R₄)** $y=-x-\frac{1}{2}$

V. Soit g la fonction numérique définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=sin^2x$. La dérivée de g est................................C'est une fonction ..............................sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise ............de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers........................Sa .............................. est dérivable sur $]0,1[$ et $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=$...................... **(2.5pts)**

**EXERCICE II (05 points)**

f est une application de C dans C définie par :

$$f(z)=z^3-2(2+3i)z^2+(-6+11i)z+7+i$$

1. Montrer que l'équation $f(z)=0$ admet une racine imaginaire pure $z_1$ que l'on déterminera **(0.5pt)**

2. 2.1) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout z dans C, on a

$$f(z) = (z-i)(az^2+bz+c)$$ **(0.5pt)**

2.2 Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$. On désignera par $z_2$ *et* $z_3$ les autres solutions telles que $|z_3| > |z_2|$ **(0.75pt)**

3. Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). A, B et C sont des points du plan d'affixes respectives $z_A = i$, $Z_B = 1 + i$ *et* $z_C = 3 + 4i$

3.1 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la valeur de cos $(\widehat{BAC})$ **(0.5pt)**

3.2 Déterminer en radian *mes* $(\widehat{BAC})$ et la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ **(0.5pt)**

4. Si A' est le milieu du segment $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer les longueurs des segments $[AA']$ *et* $[AG]$ **(1pt)**

5. S est la similitude directe du plan de centre A qui transforme C en B

5.1 Déterminer la transformation complexe associée à S **(0.75pt)**

5.2 Déterminer les autres éléments géométriques de S **(0.5pt)**

**PROBLEME (08.5 points)**

On donne la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et $(C_f)$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$)

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ **(0.75pt)**
2. 2.1) Calculer les limites de f en $-\infty$ *et* $+\infty$ **(1pt)**

2.2) Montrer que $\lim_{x\to 1^+}(f(x)) = -\infty$ **(0.5pt)**

**2.3)** Justifier que pour $x \in ]-\infty, -1[$, $f(x) = \frac{1}{x+1}[1 + (-x-1)\ln(-x-1) + (x+1)\ln(-x+1)]$ puis en déduire la limite de f lorsque x tend vers $-1^-$ **(1pt)**

3. Montrer que f est dérivable sur $D_f$ et que $f'(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2(x-1)}$ **(1pt)**
4. Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation **(1pt)**
5. 5.1) Montre que l'équation $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x+1}$ admet une unique solution $\alpha \in ]-1{,}6, -1{,}5[$ **(1pt)**

5.2) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x **(0.75pt)**

6. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[-3, -1[$ et on admet que g réalise une bijection de $[-3, -1[$ vers $\left]-\infty, -\frac{1}{2} + \ln 2\right]$

6.1 Dresser le tableau de variation de $g^{-1}$ **(0.5pt)**

6.2 Construire les courbes de f et de $g^{-1}$ sur le même graphe **(1pt)**