

EXERCICE I : (4 pts)

Les réels a et b sont tels que : $0 < b < a$. la suite (u_n) est définie par : $u_0 = a + b$ et $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

- 1- Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a$. 1 pt
- 2- Montrer que la suite (u_n) est décroissante. 1 pt
- 3- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. 1,5 pt
- 4- Déterminer alors la limite de la suite (u_n) définie par : $= \frac{u_n - a}{u_n - b}$. 0,5 pt

EXERCICE II : (5pts)

1- Le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^4 + (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)z^3 + 2z^2 + (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)z + 1$.

a)- Soit z_0 un nombre complexe non nul. Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\frac{1}{z_0}$ l'est aussi. 0,75 pt

b)- Vérifier que $-i$ et $1 - i$ sont des racines de P 1 pt

c)- En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$. 1 pt

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 4 cm. Les points A et B ont pour affixe $z_A = 1 - i$ et $z_B = \frac{1}{2}(1 + i)$. La similitude plane directe s de centre O est telle que $s(A) = B$.

a)- Placer les points A et B. 0,5 pt

b)- Calculer $\frac{z_B}{z_A}$ et en déduire la nature du triangle OAB. 0,5 pt

c)- Déterminer alors l'écriture complexe de s puis préciser son rapport et son angle. 1 pt

d)- Calculer l'affixe du point K centre du cercle circonscrit au triangle OAB. 0,25 pt

PROBLEME : (11 pts) (les deux parties du problème sont indépendantes.)

Partie A : (5,5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . La suite (M_n) des points du plan qui ont pour affixes $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{3}z_n$ est considérée.

1- On pose $\arg(z_n) = u_n$. 0,5 pt

a)- Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique. 0,5 pt

b)- Exprimer u_n en fonction de n. 0,5 pt

2- La suite (v_n) est définie par $v_n = |z_n|$. 0,5 pt

a)- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et conclure. 0,5 pt

b)- Déduire l'expression de v_n en fonction de n. 0,5 pt

3- Ecrire alors z_n en fonction de n. 0,5 pt

4- Pour quelles valeurs de n :

a)- z_n est-il réel ? 0,5 pt

b)- z_n est-il imaginaire pur ? 0,5 pt

5- La suite géométrique (w_n) est définie par $w_n = |z_{n+1} - z_n|$. Calculer w_n en fonction de n. 0,75 pt

6- On pose $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$. 0,5 pt

a)- Exprimer S_n en fonction de n 0,5 pt

b)- Donner une interprétation géométrique de S_n . 0,75 pt

Partie B : (5,5 pts)

1- La fonction f est définie dans \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 7$

a)- Dresser le tableau de variations de f .

1 pt

b)- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[2 ; 3]$

1 pt

c)- Déterminer le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .

0,75 pt

2- La fonction g est définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = \frac{2x^3 + 6x + 7}{2x^2}$.

a)- Montrer que pour tout réel non nul x , $g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}$

0,75 pt

b)- Déduire le sens de variations de g .

0,75 pt

c)- Montrer que $g(\alpha) = \frac{3(4\alpha+7)}{2\alpha^2}$

0,5 pt

d)- Montrer que g est une bijection de $]0 ; \alpha[$ vers un intervalle J à préciser.

0,75 pt

Cette épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème étalés sur deux pages.

EXERCICE 1 : 4points

Les fonctions logistiques sont utilisées en économie, en biologie et en psychologie pour décrire l'évolution d'une population à « croissance limitée ».

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{10}{1+e^{-x}}$. Une population de lapins est introduite dans une petite île. On appelle $f(x)$ la population en milliers de lapins en fin d'année de rang x . $f(0)$ est le nombre de millions de lapins présents sur l'île en fin 2000, $f(1)$ le nombre de millions de lapins en fin 2001, $f(-1)$ le nombre de millions de lapins en fin 1999, ... L'accroissement de la population est non seulement proportionnel à la quantité de lapins mais aussi à l'écart théorique entre le nombre maximal m de lapins et la population actuelle.

1. Calculer la dérivée de f et montrer qu'on a : $f'(x) = \frac{1}{10} f(x) [10 - f(x)]$. 0.75pt
2. Dresser le tableau de variation de f . 0.75pt
3. Montrer que $A(0 ; 5)$ est un centre de symétrie de la courbe de f et tracer la courbe. 1pt
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 9$. 0.5pt
5. a) Quel était le nombre de lapins présents sur l'île en 1998 ? 0.25pt
 b) Déterminer en quelle année 9 millions de lapins seront présents sur île. 0.25pt
 c) Sachant que le modèle est pertinent, calculer le nombre maximal m de lapins. 0.5pt

EXERCICE 2 : 5points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . S est la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(5-i)$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - z^2 - (5+4i)z - 12i + 21 = 0$ sachant qu'elle admet une unique solution réelle. 1.5pt
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S . 0.75pt
3. On considère les points A, B, C, E d'affixes respectives $3+2i ; -3 ; 1-2i$ et $5-4i$.
 - a) Faire une figure claire à compléter au fur et à mesure 0.5pt
 - b) Vérifier que $S(B) = C$. Quelle est la nature du triangle ABC ? 0.5pt
 - c) Déterminer l'affixe du point D image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 2. 0.5pt
 - d) Démontrer que le quadrilatère $ABDE$ est un carré. 0.75pt
4. (C) désigne le cercle de centre C passant par A . (C) coupe l'axe réel en deux points K et L , l'affixe de K étant positive. Démontrer que le triangle KCL est isocèle en C . 0.5pt

PROBLÈME : 11 points

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ pour $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

On munit le plan du repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , unité graphique 1 cm. (C) est la courbe de f .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire et étude de f

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

1. a) Étudier le sens de variation de g 0,5pt
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variation de g . 0,75pt
c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$. 0,25pt
d) Montrer que pour tout x de $[2, 3]$, $g(x) < \frac{1}{2}$. 0,5pt
2. a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ et démontrer que f est continue en 0. 0,75pt
b) La fonction f est dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat. 0,75pt
c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$ et en déduire la limite de f en $+\infty$. 0,75pt
d) Montrer que f est une primitive de g sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f . 1pt
3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C). 0,5pt
b) Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (C), la droite (D) et la droite $(\Delta) : y = x$. 1pt

Partie B : Dans cette partie, On désigne par I l'intervalle sur $[2, 3]$.

1. a) Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que $\forall x \in I, h'(x) < 0$. 0,5pt
b) En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I , que l'on notera α . 1pt
2. Montrer que $\forall x \in I, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0,75pt
3. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
4. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ 0,5pt
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et que la suite (u_n) converge 1pt
c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près. 0,5pt