http://www.edusec.biz

COLLEGE F.X. VOGT

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2018-2019

CLASSES : Tles D et TL

Exercice 1 : (4pts)

1-Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$.

a)Calculer u_1 et u_2.

b)Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN, 0 < u_n < 3$.

2-Soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

a)Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

b)Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)Calculer la limite de la suite (u_n)

3-On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a)Montrer que pour tout $n \in IN$, $w_n = 1 - v_n$

b)Montrer que pour tout $n \in IN$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c)Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^2(x+2) - 4$.

1-Etudier les variations de g sur $[0;+\infty[$

2-Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution α qui vérifie $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$

3-En déduire la résolution de l'inéquation $g(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$

4-On pose $h(x) = g(x^2)$; déduire de la question précédente que pour $x \in [0;+\infty[$, $h(x) > 0 \leftrightarrow x \in]\sqrt{\alpha};+\infty[$ et dresse le tableau de signe de h sur IR.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $IR/\{0\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1-Etudier la parité de f.

2-Déterminer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en déduire $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3-Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f).

4-Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

5-a)Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ puis que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2(\sqrt{x^6+2x^4}+2)\sqrt{x^2+2}}$

b)Dresser le tableau de variation complet f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

6-Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

7-Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.

http://www.edusec.biz

http://www.edusec.biz

Exercice :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = -2i, Z_B = -\sqrt{3}+i, Z_C = \sqrt{3}+i$

1-a)Ecrire Z_A, Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b)En déduire le centre et le rayon du cercle τ passant par les points A, B et C.

c)Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle τ puis placer les points B et C.

2-a)Ecrire le quotient $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b)En déduire la nature du triangle ABC.

3-a)On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians

Montrer que le point O', image de O par, a pour affixe $-\sqrt{3}-i$.

4-a)Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe Z tel que $|Z| = |Z+\sqrt{3}+i|$

b)Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

5-Soit l'application f défini dans le plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}Z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice :

Fest l'application de C dans C définie par : $F(Z) = \frac{Z}{1-iZ}$.

1-Calculer $F(1); F(i); F(1-i)$ et mettre les résultats sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

2-Démontrer que pout tout $Z(\neq -i) on\ a\ F(Z) = \frac{Z}{Z+i}$

3-On désigne par r le module de $Z+i$ et par α son argument principal.

a)Montrer que $F(Z) - i = \frac{1}{Z+i}$ et en déduire le module et un argument de $F(Z)-i$ en fonction de $r\ et\ \alpha$

b)Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan tels que $|F(Z)-i| = 2$ est un cercle que l'on caractérisera.

4-Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. S est la transformation du plan d'écriture complexe $Z' = i\sqrt{3}Z + \sqrt{3} + i$.

a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

b)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(C') = S(C)$.

c)Construire $(C')et(C)$.

Exercice

On considère les nombres complexes Z_n définis pour tout entier naturel n, par $Z_0 = 4$, $Z_{n+1} = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)Z_n$. On note le point M_n le point d'image de Z_n dans le plan.

1-a)Ecrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle les nombres complexes Z_2, Z_3, Z_4

b)Placer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.

2-Montrer que pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle isocèle en M_{n+1} pourra considérer le nombre complexe $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$

3-Pour tout entier naturel n. On pose : $d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a)Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $d_n \neq 0$

b)Montrer que d_n est une suite géométrique que de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $2\sqrt{2}$

c)Interpréter goémétriquement chacun des nombres d_n.

d)Exprimer en fonction de n la somme $S = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots . d_{n-1}$

e)Déduire la longueur de la ligne brisée $(M_0, M_1, M_2, \dots, M_n)$

http://www.edusec.biz

http://www.edusec.biz

Exercice

1-Démontrer par récurrence que

a) $\forall n \in IN.;\ 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$

b) $\forall n \in IN.;\ \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots.. + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2-a)Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - x$; $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

b)Sachant que $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Calculer$\lim_{x\to0} \frac{\sin 7x}{3x}$; $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{4x^2}$

Exercice

1-On pose $P(Z) = 3Z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)Z^2 + (5 - i15\sqrt{3}) + 24i$

a)Trouver un réel b tel que $P(ib) = 0$

b)Vérifier que pour tout $Z \in C.;\ P(Z) = (Z + 3i)(3Z^2 + (-5\sqrt{3} + i)Z + 8$

c)Résoudre $P(Z) = 0\ dans\ ....$ et écrire les solutions sous forme exponentielle

II-$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs

$Z_A = -3i;\ Z_B = \sqrt{3} - i;\ Z_C = 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$

Soit S la transformation du plan tel que S(A)=B et S(B)=C

a)Montrer en écrivant les différentes étapes que l'expression complexe de S est donnée par :

$Z' = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})Z$

b)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice :

1-Résoudre dans C l'équation $(E): Z^2 - (5 - i\sqrt{3})Z + 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

2-Sioit la transformation du plan qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3y} - \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

a)Donner l'écrire complexe de f.

b)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

c)Soit (D) la droite d'équation $y = -2x + 3$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') image de (D) par f.

3-On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z - \sqrt{3}(1 - i)$. Soient A, B et C les points d'affixe d'affixe respectives$a = -1$; $b = 2i\ et\ c = \frac{-7+\sqrt{3}}{4} + \frac{i(3\sqrt{3}-3)}{4}$

a)Déterminer l'affixe α du point D image de C par la transformation S.

b)Démontrer que le triangle ABD est isocèle rectangle en A.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

Partie A :

Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1-Etudier les variations de g.

2-Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à [2 ;3] tel que $g(\alpha) = 0$

3-Déterminer la valeur de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode par dichotomie.

4-Déterminer le signe de que $g(\alpha)\ surIR$

http://www.edusec.biz