Collège Jean Tabi d'Etoudi
Département de Mathématiques
B.P. 4174 Yaoundé
Tel/fax : 222 21 60 53

SESSION INTENSIVE DE FEVRIER 2019

Année scolaire 2018-2019
Classe : TC
Durée : 4h
Coef : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte trois exercices et un problème à deux parties indépendantes repartis sur deux pages

Exercice 1 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = cosx + sinx$.

1) Justifier que f est dérivable sur I, puis montrer que $f'(x) = \sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. (0,5pt)
2) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. (0,5pt)
3) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.
   a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$. (0,5pt)
   b) Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} - cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$. (0,5pt)
   c) Pour tout $x \in J$, calculer $cos(f^{-1}(x))$ et $sin(f^{-1}(x))$. (0,5pt)
   d) Montrer que pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$. (0,5pt)

Exercice 2 : (4,5 points)

A) Soit n un nombre entier naturel non nul. On note $n = P_0^{\alpha_0} \times P_1^{\alpha_1} \times ... \times P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n et $d(n)$ le nombre de ses diviseurs positifs.
   1) Montrer que $d(n) = (\alpha_0 + 1)(\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_r + 1)$. (0,5pt)
   2) Montrer que n est un carré parfait si et seulement si $d(n)$ est impair. (0,5pt)
   3) Soit α et β deux entiers naturels non nuls et n le nombre tel que $n = 2^\alpha \times 3^\beta$. On suppose que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs positifs de n.
      a) Démontrer que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$. (0,75pt)
      b) En déduire les valeurs de n. (0,5pt)

B) On considère deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté E_3 et l'application f de E_3 dans E_3 définie par : $\forall \vec{w} \in E_3,\ f(\vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}$.
   1) Montrer que f est une application linéaire. (0,5pt)
   2) Déterminer $Ker(f)$. (0,75pt)

3) On note $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Calculer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et $f(\vec{x})$, puis déduire la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{x})$.
(0,5pt)

Exercice 3 : (2,5 points)

Le Plan complexe est rapporté à un repère orthonormée directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout réel $\theta \in [0; 2\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$.
On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1) À partir du point M, donner une construction géométrique des points P et Q. (0,5pt)
2) On désigne par $(x; y)$ le couple de coordonnées du point P.
   a) Exprimer x et y en fonction de θ. (0,5pt)
   b) Justifier que pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$, P appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,75pt)
3) S est le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M. (On suppose que S est différent du point O).
   a) Démontrer que, quelquesoit $\theta \in [0; 2\pi[$, le nombre $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel. (0,5pt)
   b) En déduire que les points O, S et M sont alignés. (0,25pt)

Problème : (10 points)

Partie A : (4 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 e^{1-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal$(O; I; J$ d'unité graphique 2 centimètres.

1) Étudier les variations de$f$ et dressons son tableau de variations. (1pt)
2) Construire (C_f). (0,75pt)
3) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
   a) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n. (0,75pt)
   b) Déterminer le valeur de I_0 et en déduire I_1 et I_2. (0,75pt)
4) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. (0,75pt)

Partie B : (6 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 2; 1), B(1; -6; -1), C(2; 2; 2), D(0; 1; -1)$ et $E(-2; 0; 0)$.

1) Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC). (0,75pt)
2) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$, puis calculer la distance du point D au plan (ABC). (1pt)
3) Soit les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y - 3z + 2 = 0$et $y = 0$.
   a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ) dont on un vecteur directeur $\vec{u}$. (0,5pt)

   Soit $M(x, y, z)$ un point de (Δ). On pose $\overrightarrow{EM} = t\vec{u}$ où t est un paramètre réel.

c) Exprimer DM^2 en fonction de t. (0,5pt)

d) Démontrer qu'il existe un unique point M dont on précisera les coordonnées où la distance DM est minimale. (On désignera par D' ce point). (1pt)

e) Justifier que D' est le projeté orthogonal de D sur la droite (Δ) et calculer la distance DD'. (0,75pt)

4) On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 2 = 0$. Montrer que l'intersection de (S) et de (P) est un cercle dont précisera le centre et le rayon. (1pt)

COLLEGE JEAN TABI
Département de mathématiques
B.P : 4147 YAOUNDE
TEL/FAX : 222 21 60 53
N/REF : CJT/18-19/DP/AB/NMA

ANNEE SCOLAIRE 2018-2019
Séquence IV
Classe : Tle C
Durée : 50mn
Coef : 4

Devoir personnalisé du 21 janvier 2019

EXERCICE 1 (7,5points)

Le plan P est rapporte a un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$, $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, a tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. (1pt)
2. a. Déterminer l'affixe du point B', image du point B par f. (0,5pt)
b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales. (1pt)
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ ou on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M' l'image de M par f.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$_et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$. (1pt)
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$ ou x et y sont des entiers relatifs.
a. Vérifier que le couple $(-4 ; 2)$ est une solution de (E). (0,5pt)
b. Résoudre l'équation (E). (1pt)
c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant a l'intervalle $[-5 ; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. (1 ,5pt)
Placer ces points sur la figure. (1pt)

EXERCICE 2 (12,5points)

Soient f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1$.

On note (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1- Déterminer les limites de f(x) et $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement. (2pts)
2- A) Déterminer la fonction dérivée f' et dresser le tableau de variation f. (2pts)
B) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$ si et seulement si $x \leq ln2$. (1pt)
3- Montrer que le point $B(ln2 ; 1)$est un point d'inflexion de (C_f). (1pt)
4- A) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (C_g). (1pt)
B) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) . (1,5pt)
5- Soit h la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = tanx$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0; +\infty[$. (1pt)
On note g^{-1} sa fonction réciproque.
b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$. (1pt)
c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{x^2+1}$ (1,5pt)
d) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$. (0,5pt)

Collège Jean Tabi d'étoudi Département de mathématiques BP : 4174 Yaoundé-Cameroun N/Réf : CJT/18-19/DH/AB/MMLM	DEVOIR HARMONISE	Année scolaire : 2018-2019 Séquence : 3 Classe : Terminale C Durée : 4h-Coefficient : 5

DEVOIR DE MATHEMATIQUES DU MERCREDI 09 JANVIER 2019

NB : *L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Le candidat traitera obligatoirement toute l'épreuve en mettant un accent particulier sur la qualité de la rédaction.*

EXERCICE 1 (05.5 points)

1. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que :
   $PPCM(a, b) + PGCD(a, b) = b + 9$ **(1,5pt)**
2. On appelle diviseur strict d'un nombre entier tout diviseur positif de ce nombre autre que lui-même (exemple les diviseurs stricts de 6 sont : 1, 2 et 3.
   On appelle nombre parfait, tout nombre entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (exemple 6 est un nombre parfait car $1 + 2 + 3 = 6$)
   a) Déterminer les diviseurs stricts de 220 **(0,5pt)**
   b) Si p est un nombre premier, déterminer tous les diviseurs stricts de $2^4 \times p$ **(0,5pt)**
   c) Vérifier que 28 est un nombre parfait **(0,25pt)**
   d) Déterminer un nombre premier p tel que $2^4 \times p$ soit un nombre parfait **(0,75pt)**
3. A est l'ensemble des chiffres de la numération décimale $A = \{0, 1, 2, \dots\dots, 9\}$
   a) Résoudre dans $A \times A$ le système de congruences **(1pt)**
   $$\begin{cases} x + y \equiv 2\ [3] \\ x - y \equiv 8\ [11] \end{cases}$$
   b) Déterminer tous les nombres $N = 28x75y$ divisibles par 33. x *et* y sont les chiffres de la numération décimale **(1pt)**

EXERCICE 2 (03.5 points)

On considère l'équation à variable complexe (e): $z^2 - 6z + 12 = 0$

1. Résoudre dans C l'équation (e). On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative et par z_2 celle dont la partie imaginaire est positive **(0.5pt)**
2. Calculer le module et un argument de z_1, z_2 *et* $\frac{z_2}{z_1}$ **(1pt)**
3. Si A_1 *et* A_2 sont des points d'abscisses z_1 *et* z_2 respectivement, en déduire l'existence d'une rotation R de centre O qui transforme A_1 *en* A_2, puis donner l'angle θ de cette rotation **(0.5pt)**
4. On désigne par A_3 *l'image de* A_2 *par* R, A_4 *l'image de* A_3 *par* R et ainsi de suite
   a) Déterminer les affixes z_k de ces points sous forme trigonométrique **(0.5pt)**
   b) Combien y a-t-il de points A_k distincts ? **(0.5pt)**
   c) Les points de sommets A_k forment quelle figure sur un cercle ? **(0.5pt)**

PROBLEME (11 points)

NB : *Le problème comporte deux parties qui sont strictement indépendantes.*

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. On donne la droite (D) d'équation cartésienne $x-2y+2=0$. Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport -2 **(1pt)**

II. On considère l'application affine f définie du plan dans le plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(x\sqrt{3}-y+4) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une isométrie du plan **(0,5pt)**
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et conclure sur sa nature **(0,5pt)**
3. On considère la transformation g définie par : $g = t_{-2\vec{j}} o f$ où $t_{-2\vec{j}}$ est une translation de vecteur $-2\vec{j}$

   a) Démontrer que g est une symétrie orthogonale d'axe $(D): x-\sqrt{3}y=0$ **(0,5pt)**

   b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D) et un vecteur normal $\vec{n}$ de (D) tel que $\vec{u}+\vec{n}=2\vec{j}$ **(0,5pt)**

   c) Démontrer que $f = t_{\vec{u}}\ o\ t_{\vec{n}}\ o\ S_{(D)}$ **(0,5pt)**

   d) Déterminer la droite (D') telle que : $t_{\vec{n}} = S_{(D')} o S_{(D)}$ **(0,5pt)**

   e) Démontrer que $f = t_{\vec{u}}\ o\ S_{(D')}$ et donner les éléments caractéristiques de f **(0,5pt)**

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1-lnx$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

1) Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variation **(1pt)**
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions dont l'une $\alpha \in]1,2[$ **(0.75pt)**
3) Etudier les branches infinies de la courbe de g et construire (C_g) **(1pt)**
4) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\sqrt{2+2lnx}$
   a) En admettant que $g(\alpha)=0$, Calculer $h(\alpha)$ **(0.25pt)**
   b) Calculer la dérivée de h et montrer que $\forall x \in [1,+\infty[\,;\ 0 \le h'(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(1pt)**
5) Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0=\sqrt{2}$ *et* $\forall\, n \ge 1\,;\ u_{n+1}=h(u_n)$
   a) Montrer que $\forall n \in IN, 1 \le u_n \le 2$ **(0.5pt)**
   b) Montrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$ (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis) **(1pt)**
   c) En déduire que $\forall n \in IN, |u_n-\alpha| \le (\frac{\sqrt{2}}{2})^n|u_0-\alpha|$ **(0.5pt)**
   d) En déduire la limite de la suite (u_n) **(0.5pt)**

COLLEGE JEAN TABI
Département de mathématiques
B.P : 4147 YAOUNDE
TEL/FAX : 222 21 60 53
N/REF : CJT/18-19/DP/AB/NMA

ANNEE ACADEMIQUE 2018-2019
Séquence III
Classe :TC
Durée : 50mn
Coef : 5

Devoir personnalisé du 10 décembre 2018

Exercice 1(5,5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2-(1+2i)mz-(1-i)m^2=0$ où m est un nombre complexe non nul d'argument $\theta \in]0;\pi[$

1- a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (on notera z_1 *et* z_2 les solutions) (1pt)
b) montrer que $z_1 \times z_2$ est un réel strictement positif si et seulement si $\theta = \frac{5\pi}{8}$. (1pt)

Dans la suite de l'exercice, on considère $\theta = \frac{5\pi}{8}$

2- Vérifier que $z_1 \times z_2 = |m|^2\sqrt{2}$. (0,5pt)

3- Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 *et* M_2 images des solutions de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.
Dans la figure en annexe, $(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct, B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* t.
E est le point d'intersection du demi cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ avec l'axe $(O;\vec{v})$.
a) Montrer que $OE^2 = OB \times OC$ (1pt)
b) En déduire que $|m| = OE$ (0,5pt)

4- Construire le point A d'affixe m. (0,5pt)

5- En déduire une construction des points M_1 *et* M_2 images des solutions de l'équation (E) (on considéra que $|z_1| < |z_2|$) (1pt)

Exercice 2 (4,5points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x^2+x}+2x+1$

1- a) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition (0,5pt)
b) déterminer le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$. (1pt)

2- a) Montrer que f réalise une bijection de IR+ sur un intervalle J que l'on déterminera . (0,5pt)
b) Etudier la dérivabilité et la continuité de f^{-1} sur J . (0,5pt)

3-Expliciter$(f^{-1})'(x)$ pour tout x de J (1pt)

4- Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet dans IR+ une solution unique $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ (1pt)

Collège Jean Tabi d'Etoudi
Département de Mathématiques
B.P : 4174 Yaoundé
Tél : 222 21 60 53
N° Réf : CJT/18_19/DH/AB/SJ

Année scolaire 2018 – 2019
Séquence 3
Classe : Terminale D
Durée : 50 min
Coef : 4

DEVOIR PERSONNALISE DU 03 / 12/ 2018
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

I. 1. Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

i) $\frac{\ln x-1}{\ln x+1}=0$ ii) $2\ln^2 x+5\ln x-3<0$ iii) $4\ln^2 x-4\ln x+1\leq 0$. 1,5pt

2. Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis. 0,5pt

3. Déterminer une primitive des fonctions :

i) $f(x)=1=\tan^2 x$ ii) $g(x)=\frac{-x}{(1+x^2)^3}$ iii) $h(x)=\sin x\cos x$ 1,5pt

II. Soit la fonction f de représentation graphique (C_f) dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

1. Déterminer le domaine de définition Df de f. 0,5pt

2. Range par ordre croissant : $f'(-5)$, $f'(-0,5)$ et $f'(0)$. 0,5pt

3. On suppose que f est de la forme : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

a. Calculer pour tout réel x distinct de 1, $f'(x)$. 0,5pt

b. Trouver les coefficients réels a, b, c en utilisant les données ci-dessus. 1pt

c. Montrer que la courbe (C_f) admet comme asymptote oblique 0,5pt

III. *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant chaque fois votre réponse.*

1. Le module d'un nombre complexe non nul peut être nul.
2. La dérivée de la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ est $f'(x)=\ln x$
3. Un nombre complexe est nécessairement un nombre réel.
4. La primitive de la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ est $F(x)=\ln x$
5. L'argument d'un nombre réel est nul.
6. Une fonction qui admet une primitive sur un intervalle admet plusieurs primitives sur cet intervalle.
7. Soit f et g deux fonctions définies sur IR telles que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

i). La fonction f+g n'est pas minorée sur IR.

ii) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$. iii) On peut avoir $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$ 0,5pt x 8