Collège Mgr F. X. Vogt
Département de maths

Année scolaire 2018 - 2019
Séquence 4
Mercredi, 06 février 2019

MINI-SESSION DE MATHS

Classe : TC Durée : 4 h

EXERCICE I : (2.5pts)

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul. On pose $S = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1}$.

1. a) Ecrire S sous la forme d'un quotient. **0.25pt**

   b) Calculer l'expression $p^n + (1-p)S$ et en déduire que p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux. **0.5pt**

2. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $p^n x - (1-p)y = p$. **1pt**

   b) En déduire dans $\mathbb{Z}^2$, les solutions de l'équation : $10^n x + 2^{n+2}y - 10.2^{n-1} = 0$. **0.75pt**

EXERCICE II : (3pts)

1- Soit E et F deux points distincts, $(D) et (D')$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left(\overrightarrow{ME}; \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{MF}; \vec{v}\right)$. **(1pt)**

2- Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB = d$.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{d^2}{2}$ (On pourra considérer et construire le point G barycentre des points pondérés $(A; -1), (B; 4) et (C; 1)$). **(2pt)**

EXERCICE III : (3.5pts)

Soit le polynôme complexe P défini par : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \frac{z^4}{1 + cos\theta} - 2z^2 cos\theta + 4iz sin\theta cos\theta + 4sin^2\theta \quad \text{où } \theta \in]-\pi; \pi[$$

1- Établir que si z_0 est racine de P, il en est de même de $-\bar{z}_0$ **(0.5pt)**

2- Démontrer que P a une racine de la forme $k(1+i)$ où k est un réel à déterminer. **(0.5pt)**

3- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(1.5pt)**

4- Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 les images dans le plan des nombres complexes solutions de l'équation $P(z) = 0$.
Déterminer les ensembles décrits par ces différents points lorsque θ décrit $]-\pi; \pi[$. **(1.pt)**

PROBLEME : (11Points)

PARTIE A : (5Points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1- Déterminer la limite de f en $-\infty$. **0.5pt**

2- Vérifier que pour tout réel x: $f(x) = \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ et en déduire la limite de f en $+\infty$. **0.75pt**

3- Quelles sont les branches infinies de (C) ? **0.5pt**

4- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par :

$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

Etudier les variations de g et en déduire le signe de g suivant les valeurs de t. **1pt**

5- 5.1. Calculer la dérivée de f et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(e^{x})$. **0.75pt**

5.2. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation. **0.75pt**

6- Tracer (C) ainsi que ses asymptotes. **0.75pt**

PARTIE B : (3.25pts)

Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1- Etudier le sens de variation de F **0.25pt**

2- 2.1. Calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^{t}}dt$ On pourra vérifier que $\frac{1}{1+e^{t}} = 1 - \frac{e^{t}}{1+e^{t}}$ **0.5pt**

2.2. En déduire à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$. **0.75pt**

2.3. Vérifier que F peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

(1): $F(x) = x - \ln(1+e^{x}) - f(x) + \ln 2$ **0.25pt**

(2): $F(x) = \ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) - f(x) + \ln 2$ **0.25pt**

3- Déterminer les limites de F(x) en plus l'infini et en moins l'infini respectivement. **0.5pt**

4- Déterminer la limite de $[F(x) - x]$ en moins l'infini, puis donner une interprétation graphique du résultat. **0.75pt**

PARTIE C : (2.75pts)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^{k})$

1- Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire en unités d'aire est u_n **1pt**

2- Donner le sens de variation de la suite (u_n). **0.5pt**

3- 3.1. Justifier que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ **0.5pt**

3.2. Comparer u_n et $F(n)$ **0.5pt**

4- La suite (u_n) est-elle convergente ? **0.75pt**

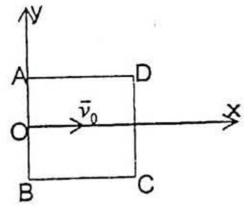
Collège Mgr F. X. Vogt
Département de physique

Année scolaire 2018 - 2019
Mercredi, 06 février 2019

MINI SESSION PHYSIQUE

Classe : TC **Durée :** 4 h **Coef:** 4

EXERCICE 1: Mouvement dans les champs de forces. / 6 points



1. Mouvements de particules chargées.

Des ions $^{27}Al^{3+}$ pénètrent en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale de valeur $v_0 = 4.\ 10^5$ m/s dans un plan de l'espace ABCD vertical de forme carrée, de côté 10 cm. On donne AO = OB.
On négligera le poids des ions devant les forces électriques et magnétiques.

1.1. Dans la région ABCD règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$, vertical orienté du bas vers le haut, d'intensité E = 200 kV/m.

- 1.1.1. Définir : champ électrique uniforme. **0,25 pt**
- 1.1.2. Montrer que la trajectoire des ions reste dans le plan ABCD. Ecrire l'équation de cette trajectoire. **1,00 pt**
- 1.1.3. Déterminer les coordonnées du point de sortie S_1 des ions du champ électrique. **0,50 pt**

1.2. Dans la région ABCD règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal, perpendiculaire à $\vec{v}_0$ et entrant, de valeur B = 0,4 T.

- 1.2.1. **Citer un dispositif de production de champ magnétique uniforme.** **0,25 pt**
- 1.2.2. Montrer que la trajectoire des ions reste dans le plan ABCD. **0,50 pt**
- 1.2.3. Calculer le rayon r de cette trajectoire.
- 1.2.4. Déterminer les coordonnées du point de sortie S_3 des ions de la région ABCD. **0,50 pt**

Données : masse du proton = masse neutron = $m_0 = 1,67.\ 10^{-27}$ kg ;
Charge élémentaire : $e = 1,6.\ 10^{-19}$ C.

2. Mouvements des satellites.

Autour de la planète Terre gravitent des satellites. On considère que chaque satellite de masse m n'est soumis qu'à la seule force gravitationnelle de la part de la Terre de masse M et que les astres ont une répartition de masse à symétrie sphérique.
On note r le rayon de la trajectoire circulaire décrite par les satellites autour de la Terre.
r représente la distance entre le centre de la Terre et le centre du satellite étudié.
G représente la constante universelle de gravitation.

- 2.1. Donner l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par la Terre sur un satellite. Représenter cette force sur un schéma. **0,50 pt**
- 2.2. Montrer qu'un satellite est animé d'un mouvement uniforme dans un référentiel que l'on précisera. **0,50 pt**
- 2.3. Etablir l'expression de la période de révolution T d'un satellite autour de la Terre en fonction de r, G et M. **0,50 pt**

2.4. En déduire la relation $\frac{T^2}{r^3} = \frac{k}{M}$, où k est une constante dont il faut déterminer l'expression. **0,50 pt**

2.5. L'étude des mouvements des satellites de la Terre permet de déterminer la période et le rayon de l'orbite de chaque satellite. A l'aide de ces grandeurs, on a pu tracer le graphe $T^2 = f(r^3)$. L'équation de la meilleure droite passant par les points obtenus est : $T^2 = 9{,}89.10^{-14} r^3$. En déduire la masse M de La Terre. **0,50 pt**

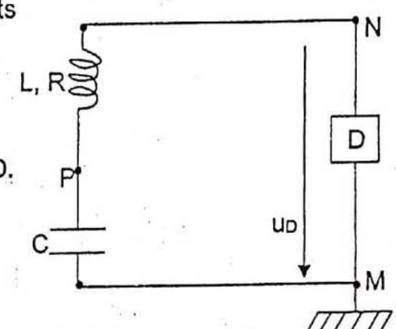
On prendra : $G = 6{,}67.\ 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

2.6. Un satellite S se déplace vers l'est, sur une orbite d'altitude 400 km. La Terre effectue un mouvement de rotation uniforme de période T_0 autour de l'axe polaire. Exprimer en fonction de T et T_0, l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du satellite S à la verticale d'un point donné de l'équateur. **0,50 pt**

EXERCICE 2 : Phénomènes périodiques. / 4 points

1. Oscillations entretenues.

Le circuit ci-dessous comprend une bobine d'inductance L = 10 mH et de résistance R, un condensateur de capacité C= 4 μF et un dipôle D. La tension u_D aux bornes du dipôle D est proportionnelle à l'intensité i du courant qui traverse : $u_D = -R_0 i$, avec $R_0 > 0$.



1.1. Justifier le nom de « résistance négative » attribué au dipôle D. **0,25 pt**

1.2. Reproduire le schéma et choisir un sens positif pour i. **0,25 pt**

1.3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur. On fera apparaître les grandeurs L, C, R_0, R. **0,75 pt**

1.4. Montrer que pour $R = R_0$, les oscillations sont sinusoïdales ; calculer leur période propre. **0,75 pt**

2. Dans l'étude stroboscopique d'une lame vibrante, le disque troué qui produit les éclairs a 20 trous et fait N tours par seconde.

2.1. Sachant que la plus grande valeur de N pour laquelle la lame paraît unique et immobile est N = 20, calculer la fréquence du mouvement de la lame. **0,50 pt**

2.2. Déterminer les valeurs possibles de N pour que la lame paraisse immobile dans la position d'équilibre. **0,50 pt**

3. Deux courants alternatifs d'intensité $i_1 = 3\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ *(en ampères)* et $i_2 = 4\sin(100\pi t)$ *(en ampères)* arrivent en un nœud A d'un circuit.

Déterminer, à l'aide de la méthode de Fresnel, l'intensité instantanée du courant résultant $i = i_1 + i_2$. **1,00 pt**

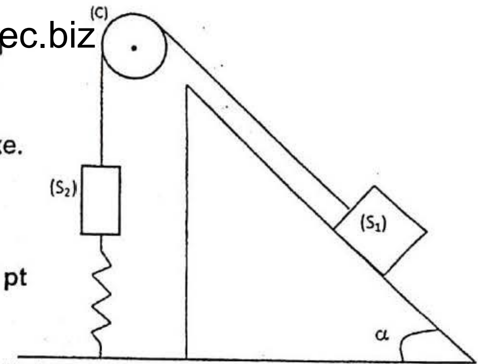
EXERCICE 3: Systèmes oscillants. / 6 points

1. Oscillateur mécanique.

Un cylindre (C) homogène de masse M = 300 g et de rayon r = 20 cm est mobile autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son centre d'inertie O et supporte

ux solides (S_1) et (S_2) de masses respectives
m_1 = 200 g et m_2 = 50 g par l'intermédiaire d'un fil

inextensible. Le solide (S_2) est relié à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$, l'autre extrémité du ressort étant fixe.



On néglige les frottements.

On donne $\alpha = 30°$; $g = 10\ m.s^{-2}$.

1.1. Calculer l'allongement du ressort à l'équilibre. **0,50 pt**

1.2. On écarte le solide (S_2) de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance b = 5 cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.

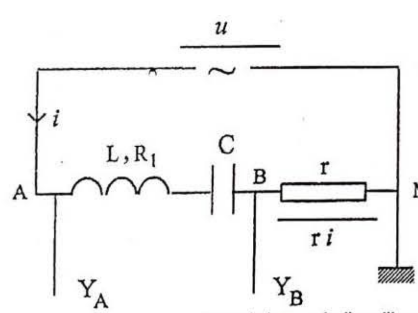
1.2.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S_2). **1,00 pt**

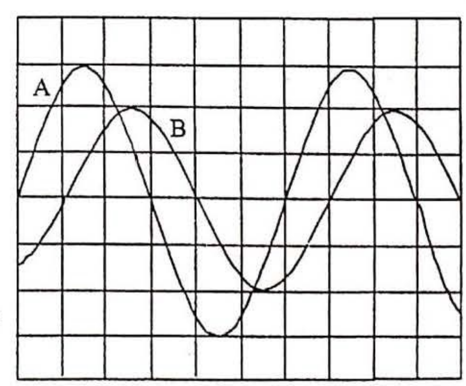
1.2.2. Calculer la période des oscillations propres du système. **0,50 pt**

1.2.3. Sur un axe vertical x'x orienté vers le bas, on prend pour origine des dates un instant où (S_2) passe par la position d'abscisse x = 2 cm en montant ; l'origine des espaces est la position d'équilibre. Etablir l'équation horaire du mouvement de (S_2). **0,50 pt**

2. Oscillateur électrique.

Un dipôle RLC, placé entre A et M, est soumis à une tension sinusoïdale u fournie par un générateur de basse fréquence (G.B.F.). Il comprend une bobine d'inductance L réglable et de résistance $R_1 = 14\ \Omega$, un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ et une résistance $r = 1\ \Omega$. Les points A, B et M sont respectivement reliés à l'entrée Y_A, à l'entrée Y_B et à la borne "masse" d'un oscilloscope bicourbe en mode balayage. Les oscillogrammes des voies Y_A et Y_B sont repérés sur l'écran par les lettres A et B, respectivement.





Les réglages de l'oscilloscope sont :
- sensibilité voie A : 2 V/div ;
- sensibilité voie B : 0,1 V/div ;
- balayage : 2 ms/div

2.1. Étude des oscillogrammes.

2.1.1. Calculer la période et la fréquence de la tension *u* et de l'intensité *i*. **0,50 pt**

2.1.2. Calculer le déphasage de *u* par rapport à *i*. Le dipôle est-il inductif ou capacitif ? **0,50 pt**

2.1.3. Donner les expressions, en fonction du temps, de l'intensité i et de la tension u en prenant u comme référence. [illegible]

2.1.4. Quelle est l'impédance du dipôle AM ? [illegible]

2.1.5. Calculer la valeur de L. [illegible]

2.2. Mise en résonance du circuit

On donne à L une nouvelle valeur L = 1 H et on règle le G.B.F. pour obtenir la résonance.

Calculer la valeur à donner à la fréquence. 0,50 pt

EXERCICE 4 : EXPLOITATION DES RESULTATS D'UNE EXPERIENCE. / 4 points

On se propose de déterminer le moment d'inertie J_0 d'une tige homogène AB, par rapport à un axe passant par son centre O. A cet effet, on la suspend par son centre d'inertie G à l'extrémité inférieure d'un fil de torsion vertical, de constante de torsion C. L'extrémité supérieure est fixée en un point d'un support horizontal. On place deux solides ponctuels S et S', de même masse m = 10 g, sur la tige, de part et d'autre de O, à la distance OS = OS' = x. Au cours de l'expérie[illegible] demeure horizontale. On écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre d'u[illegible], on l'abandonne sans vitesse initiale, puis on note la durée Δt de 10 oscillations pour différentes valeurs de x. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

x (cm)	5	10	15	20	25
x^2 (cm^2)					
Δt (s)	102,1	107,7	116,5	127,8	141,0
$\frac{T_0^2}{4\pi^2}$ (s^2)					

1) Citer deux appareils de mesure utilisés lors de cette expérience. **0,50 pt**
2) Pourquoi mesure-t-on la durée de 10 oscillations plutôt qu'une seule ? **0,25 pt**
3) Reproduire et compléter le tableau en prenant $\pi^2 = 10$. **0,50 pt**
4) On pose $y = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$; tracer la courbe $y = f(x^2)$. **1,00 pt**

   Echelles : 1 cm pour 50 cm^2 et 1cm pour 0,40 s^2.
5) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir l'expression littérale de la période propre T_0 des oscillations en fonction de J_0, C, m et x. **0,75 pt**
6) Déterminer, à partir d'une exploitation graphique, les valeurs de J_0 et de C, en unités du système international. **1,00 pt**