

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session principale 2016

Exercice 1

$$1) \text{ a) } \theta \equiv \left(\overline{AB}, \overline{AF} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

b) On sait que $f(B) = F$ et $(GF) \perp (BC)$ car (GF) est la médiatrice de $[BC]$, on en déduit que l'image de (BC) est (GF) .

c) Puisque $f(A) = A$ et $(AB) \perp (AC)$ donc l'image de (AC) est (AB) .

$$C \in (BC) \cap (AC) \text{ donc } f(C) \in f((BC)) \cap f((AC)) \text{ donc } f(C) \in (GF) \cap (AB) = \{E\}.$$

Il en résulte que $f(C) = E$.

2) a) Le cercle ζ_1 est de diamètre $[BC]$ donc son image par f est le cercle de diamètre $[f(B)f(C)]$, or $f(B) = F$ et $f(C) = E$, il en résulte que l'image de ζ_1 par f est le cercle de diamètre $[EF]$.

Ainsi $f(\zeta_1) = \zeta_2$.

b) (Voir figure)

c) Les points I et H appartiennent au cercle ζ_2 de diamètre $[EF]$ privé de E et F donc

$$\angle EIF = \angle EHF = \frac{\pi}{2}, \text{ de plus les points } A \text{ et } F \text{ sont deux points de l'arc orienté } IH \setminus \{I, H\} \text{ situé sur } \zeta_2$$

donc $\left(\overline{FH}, \overline{FI} \right) \equiv \left(\overline{AH}, \overline{AI} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Ainsi le quadrilatère $HEIF$ admet trois angles droits donc c'est un rectangle.

$$d) F \in (AF) \cap (HF) \text{ donc } f(F) \in f((AF)) \cap f((HF)) \text{ donc } (AE) \cap (IF) = \{I\}.$$

Il en résulte que $f(F) = I$.

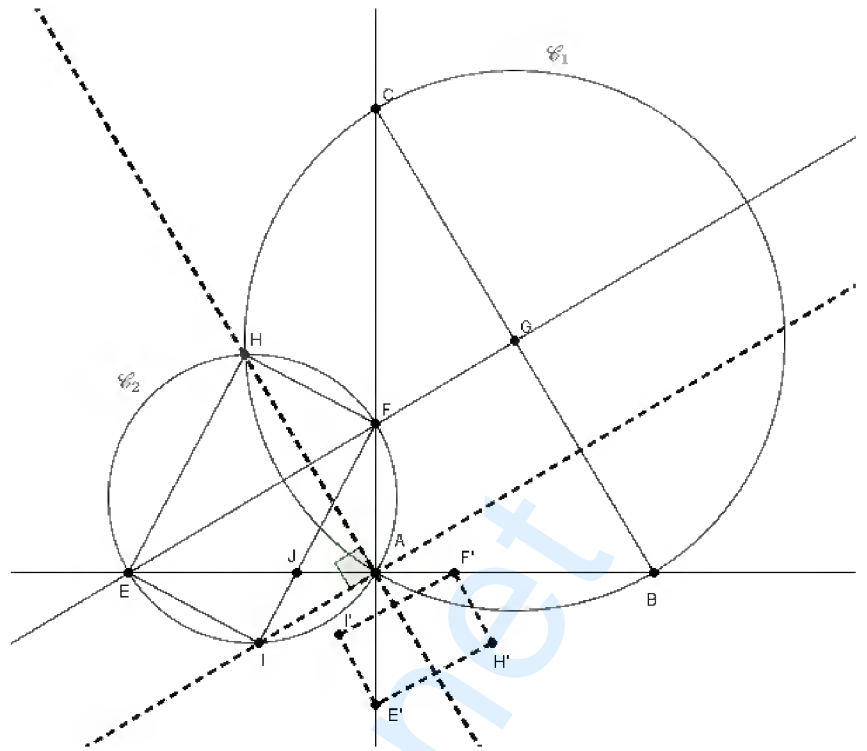
3) a) $S_{(AC)} \circ f$ est la composée d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte

$$\text{de plus } \begin{cases} S_{(AC)} \circ f(A) = A = g(A) \\ S_{(AC)} \circ f(B) = F = g(B) \\ A \neq B \end{cases}, \text{ on en déduit que } g = S_{(AC)} \circ f.$$

b) Le point $E \in (AB)$ donc

$$E' = g(E) \in g((AB)) = (AF) = (AC).$$

c) Voir figure.



Exercise 2

1) a) $\Delta = (1 + 2i)^2 m^2 + 4(1 - i)m^2 = m^2$. Soit $\delta = m$.

$$z_1 = \frac{(1 + 2i)m - m}{2} = im \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(1 + 2i)m - m}{2} = m(1 + i).$$

$$b) (z_1 z_2 \text{ est un réel strictement positif}) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv 0 [2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\theta = \frac{5\pi}{8} \right).$$

2) $z_1 z_2 = m^2 i(1 + i) = |m|^2 e^{i\frac{5\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = |m|^2 \sqrt{2} e^{i2\pi} = |m|^2 \sqrt{2}$.

3) a) Le point $E \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\}$ donc le triangle BEC est rectangle en E et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O.

$$\frac{OC}{OE} = \tan(OEC) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} - OEC\right) = \cotan(BEO) = \frac{OE}{OB}, \text{ il en résulte que}$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OE}{OB} \Leftrightarrow OE^2 = OC \cdot OB.$$

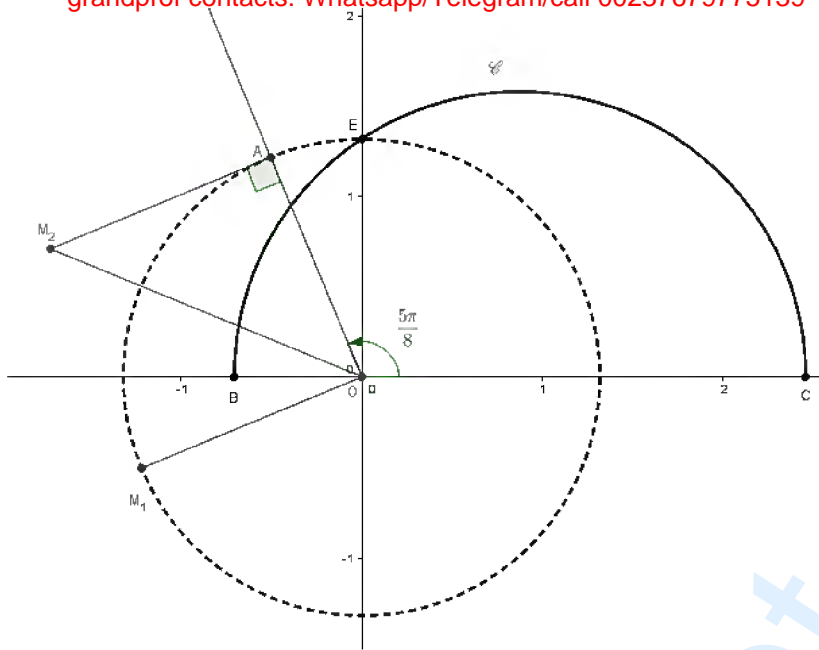
b) D'une part $m = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$ donc $|m| = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}}$, d'autre part $OE^2 = OC \cdot OB = t \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $OE = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}}$.

Il en résulte que $|m| = OE$.

4) a) Voir figure.

a) On a $z_2 = m(1 + i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} m$, il en résulte que M_2 est l'image de A par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$z_1 = im = e^{i\frac{\pi}{2}} m$, il en résulte que M_1 est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Exercise 3

- 1) On a $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2^4} \\ a \equiv 1 \pmod{5^4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4} \\ a - 1 \equiv 0 \pmod{5^4} \end{cases}$, on en déduit que $a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4 \times 5^4}$ ou encore $2^4 \wedge 5^4 = 1$

$$a \equiv 1 \pmod{10^4}.$$

- 2) $9217 \equiv 2 \pmod{5}$ donc $b = (9217)^4 \equiv 2^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$.

$$9217 \equiv 1 \pmod{2^4} \text{ donc } b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}.$$

- 3) a) Pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b^{5^{n+1}} - 1 = (b^{5^n})^5 - 1 = (b^{5^n} - 1 + 1)^5 - 1 = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En utilisant la formule du binôme,

$$b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n.$$

- 4) a) Si 5^{n+1} divise b_n alors il existe un entier k tel que $b_n = 5^{n+1}k$, il en résulte que

$$b_n^5 = (5^{n+1}k)^5 = 5^{5n+5}k^5 = 5^{n+2}(5^{4n+3}k^5) \text{ ce qui prouve que } 5^{n+2} \text{ divise } b_n^5.$$

b) Vérification pour $n = 0$. $b_0 = b - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ Vrai (D'après 2)

Soit n un entier naturel. Supposons que $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$ et montrons que $b_{n+1} \equiv 0 \pmod{5^{n+2}}$.

Puisque $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$ c'est-à-dire 5^{n+1} divise b_n donc 5^{n+2} divise b_n^5 , $5b_n^4$, $10b_n^3$, $10b_n^2$ et $5b_n$, il en résulte que 5^{n+2} divise $b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n = b_{n+1}$. D'où le résultat.

- 5) a) D'après 4)b) et pour $n = 3$, $b_3 = b^{125} - 1 = 9217^{500} - 1 \equiv 0 \pmod{5^4}$ donc $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

b) D'après 2) $b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}$ donc $b^{125} = (9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$.

Ainsi $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$ et $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$ d'après 1) $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

c) on sait que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$ donc $(9217)^{501} \equiv 9217 \pmod{10000}$, il en résulte que

$$\left((9217)^{167} \right)^3 \equiv 9217 \pmod{10000} \text{ ou encore le cube du nombre } (9217)^{167} \text{ est congru à } 9217 \text{ modulo } 10000.$$

Exercice 4

A.

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C_f) .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^3} = +\infty$. (C_f) admet une branche

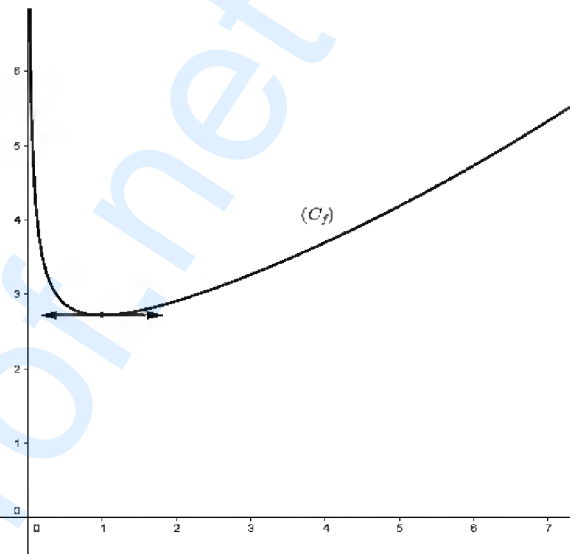
parabolique infinie de direction celle de (O, \vec{j}) en $+\infty$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

↘ e ↗



c) Voir figure.

3) $S_\lambda = \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \left[e^{\sqrt{x}} \right]_\lambda^1 = 2(e - e^\lambda)$ ua.

$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 2(e - e^\lambda) = 2(e - 1)$.

B.

1) La fonction g_1 est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $g_1(]0, 1]) = [e, +\infty[$.

La fonction g_2 est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g_2([1, +\infty[) = [e, +\infty[$.

2) a) La fonction g_1 est une bijection de $]0, 1]$ sur $[e, +\infty[$. $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$ donc l'équation $g_1(x) = e + \frac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0, 1]$, or $g_1(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$ il en résulte que $\alpha_n \in]0, 1[$.

La fonction g_2 est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$. $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$ donc l'équation $g_2(x) = e + \frac{1}{n}$ admet une solution unique $\beta_n \in [1, +\infty[$, or $g_2(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$ il en résulte que $\beta_n \in]1, +\infty[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

b) On sait que $g_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_1^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_1^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

De même on sait que $g_2(\beta_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_2^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_2^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1$.

3) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f(x) - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = 1 = h(0)$ donc h est continue à droite en 0.

b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $f(x) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha_n$ ou $x = \beta_n$.

x	0	α_n	β_n	$+\infty$
h(x)	o	+	-	o

4) a) La fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$ donc la fonction u est la primitive de la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ qui s'annule en 0, il en résulte que u est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et dérivables sur $]0, +\infty[$, il en résulte que la fonction v est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$.

Il en résulte que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = v'(x)$ par suite pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$u(x) = v(x) + c$ où c est un réel, or les fonctions u et v sont continues sur $[0, +\infty[$ donc

$u(x) = v(x) + c$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et comme $u(0) = v(0) = 0$ donc $c = 0$.

Ainsi $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

c) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} f(x) - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

on en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right)$ par suite pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt - \left(e + \frac{1}{n}\right) \int_0^x \sqrt{t} dt = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) [t\sqrt{t}]_0^x \\ &= 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

5) $A_n = \int_0^{\beta_n} |h(x)| dx = \int_0^{\alpha_n} h(x) dx + \int_{\beta_n}^{\alpha_n} h(x) dx = 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + 4(\sqrt{\alpha_n} - 1)e^{\sqrt{\alpha_n}} - \frac{4}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \alpha_n \sqrt{\alpha_n} - 2(\sqrt{\beta_n} - 1)e^{\sqrt{\beta_n}} + \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \beta_n \sqrt{\beta_n} = 2 - \frac{2}{3} e.$$