

<p>REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION</p> <p>◆◆◆</p> <p>EXAMEN DU BACCALAUREAT</p> <p>◆◆◆</p> <p>SESSION DE JUIN 2006</p>	<p>SESSION DE CONTROLE</p> <p>SECTION : MATHEMATIQUES EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4</p>
---	--

EXERCICE 1 (5 points)

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2 .

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2 . Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « Obtenir deux jetons noirs »

B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1 , sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geq 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

a – Donner la loi de probabilité de X .

b – Calculer son espérance et sa variance.

c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton

blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a – Dresser le tableau de variation de f .

b – Tracer la courbe \mathcal{C} (on étudiera les branches infinies).

2) Soit $v_n = \int_0^n f(x) dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a – Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_n = 2 - (2+n)e^{-n}$

b – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

3) Pour tout k de \mathbb{N}^* on pose $u_k = \int_{k-1}^k f(x) dx$.

Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

4) a – Montrer que pour tout k de \mathbb{N}^* , $u_k = (e-1)k e^{-k} + (e-2)e^{-k}$

b – En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$v_n = (e-1) \sum_{k=1}^n k e^{-k} + \frac{e-2}{e-1} (1 - e^{-n}).$$

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n k e^{-k}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

PROBLEME (10 points)

Soit $AFED$ un carré de côté 4 cm tel que $(\overline{AF}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF) .

A – 1) a – Soit r la rotation définie par $r(F) = E$ et $r(E) = D$. Préciser l'angle et le centre de r .

b – Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$; où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1) .

Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE) .

2) Soit $r' = t_{\overline{OO_1}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overline{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overline{OO_1}$ et r^{-1} désigne la rotation réciproque de r .

a – Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b – Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r' .

3) On désigne par g l'antidépacement défini par $g(D) = F$ et $g(O) = O_1$.

a – Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b – Soit M un point du plan.

Montrer que $[g(M) = r'(M)]$ si et seulement si $[f(M) = M]$.

c – En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M) = r'(M)$.

B – Soit s la similitude directe telle que $s(A) = F$ et $s(B) = E$

1) a – Déterminer l'angle et le rapport de s .

b – Montrer que $s = r \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$ où r est la rotation définie dans A-1)a et $h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$ est

l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Soit Ω le centre de s .

a – Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs $[AF]$ et $[BE]$.

Construire Ω .

b – Montrer que $s(E) = O$. En déduire que Ω , O et B sont alignés.

- 3) On pose $B_0 = B$ et pour tout entier naturel $n : B_{n+1} = s(B_n)$.
- Préciser B_1 et B_2 .
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul, le triangle $B_{n-1} B_n B_{n+1}$ est rectangle et les points B_{n-1} , Ω et B_{n+1} sont alignés.
 - Donner un procédé de construction de B_{n+1} à partir de B_{n-1} et B_n .
- 4) Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = B_n B_{n+1} = \overline{B_n B_{n+1}}$
- Montrer que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.
 - Soit $\sigma_n = \sum_{k=0}^n d_k$. Calculer σ_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$.

C – On désigne par : I le milieu de $[AF]$, J le milieu de $[OI]$ et L le symétrique de J par rapport à I. Soit \mathcal{E} l'ellipse de sommets A, F, J et L.

- Construire les foyers G_1 et G_2 de \mathcal{E} (G_1 désigne le foyer qui appartient au segment $[IF]$).
- Soit $G_1' = s(G_1)$ où s est la similitude directe de centre Ω , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
 - Montrer que la droite $(\Omega G_1')$ est tangente à l'ellipse \mathcal{E} .
 - Construire le point de contact M de \mathcal{E} et de $(\Omega G_1')$.