SESSION De CONTROLE 2006

Solutions de l'exercice1

1) p(A) = $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ p(B) = $\frac{2\times3}{25}+\frac{3\times2}{25} = \frac{12}{25}$ p(C) = $\frac{3\times3}{25}+\frac{2\times2}{25} = \frac{13}{25}$

2) a – On choisit l'urne U_1 et on tire un jeton blanc ou on choisit l'urne U_2 et on tire un jeton blanc.

Soient : D l'événement « tirer un jeton blanc » , U_1 : « tirer un jeton de l'urne U_1 » et

U_2 : « tirer un jeton de l'urne U_2 » .

on a D= $(U_1 \cap D) \cup (U_2 \cap D)$ avec $(U_1 \cap D)$ et $(U_2 \cap D)$ incompatibles.

la probabilité de tirer un jeton blanc est donc

p(D) = p($U_1\cap$D) + p($U_2\cap$D) = p(U_1).p(D/U_1) + p(U_2).p(D/U_2) = $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$ = $\frac{1}{2}$.

b) p(U_1/D) = $\frac{p(U_1 \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

3) X(Ω) = { 1 , 2, … , n }. X suit une loi binomiale de paramètres n et p = $\frac{1}{2}$.

a) k ∈ { 1 , 2, … , n } : p(X = k) = $C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) E(X) = n $\times\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ V(X) = n $\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

c) p(X = 2) = $C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $C_n^2 \geq 1$ alors p(X = 2) ≥ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solutions de l'exercice2

f est définie sur IR par f(x) = (1 + x). e^{-x}

1) a) f est dérivable sur IR et f '(x) = –x . e^{-x}. $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) = –∞ .

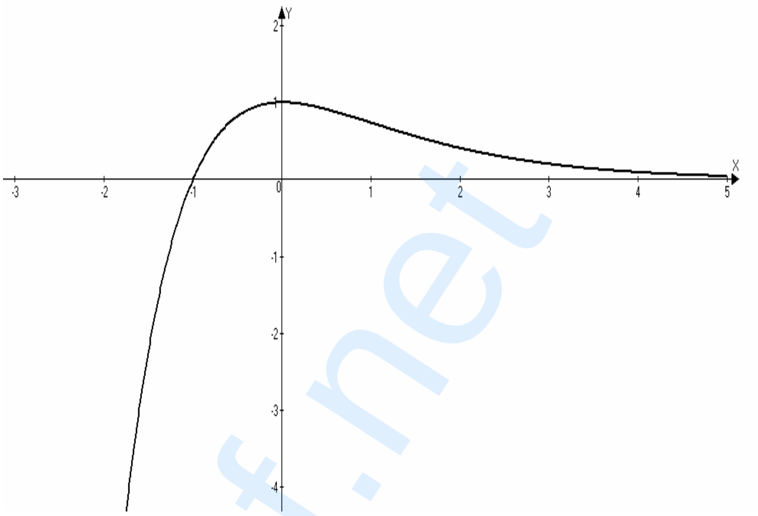
$\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - (-x e^{-x}) = 0$.

x	–∞ 0 +∞
f '(x)	+ 0 –

f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) e^{-x} = +\infty$.

C admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.



2) a) $v_n = \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n + \int_0^n e^{-x}dx = 2 - (2+n)e^{-n}$.

b) $v_n = g(n)$ avec $g(x) = 2-(2+x)e^{-x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

3) $v_n = \int_0^n f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

4) a) $k \in IN^*$: $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{k-1}^{k} (1+x)e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{k-1}^{k} + \int_{k-1}^{k} e^{-x}dx$

$= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{k-1}^{k} + \left[-e^{-x}\right]_{k-1}^{k} = (e-1)\,k e^{-k} + (e-2)\,e^{-k}$

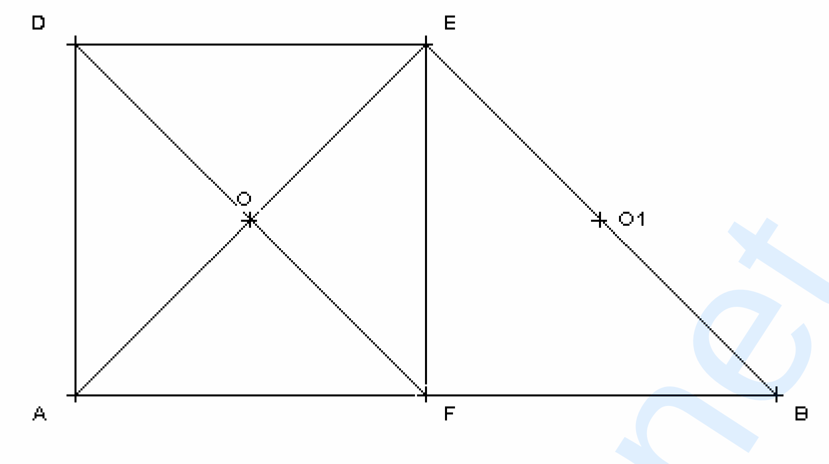
b) $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = (e-1)\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k} + (e-2)\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k} = (e-1)\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k} + (e-2)\times e^{-1}\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$.

$v_n = (e-1)\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k} + \dfrac{e-2}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)$

5) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k} = \dfrac{1}{e-1}\left(v_n - \dfrac{e-2}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{e-1}\left(2-\dfrac{e-2}{e-1}\right) = \dfrac{e}{(e-1)^2}$

Solutions Du Problème

A –



1)a- L'angle de r est $\left(\overrightarrow{FE}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ED}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FE}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{FA}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$.

Le centre de r est O : point d'intersection des médiatrices de [FE] et [ED].

b- O est le milieu de [EA], les symétries orthogonales conservent les milieux, donc O_1 est le milieu de [EB]. EOFO_1 est un carré.

f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, donc f est un antidéplacement.

De plus f(O) = ro$S_{(OO_1)}$(O) = r(O) = O et f(E) = ro$S_{(OO_1)}$(E) = r(F) = E et O et E sont deux points distincts, donc f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

(ou encore, on écrit r = $S_{(OE)}$o$S_{(OO_1)}$, donc f = ro$S_{(OO_1)}$ = $S_{(OE)}$o$S_{(OO_1)}$o $S_{(OO_1)}$ = $S_{(OE)}$)

2) a- r' est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle – π/2, donc r' est une rotation d'angle –π/2.

b- r'(O) = $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ o r^{-1}(O) = $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ (O) = O_1.

Comme FO = FO_1 et $\left(\overrightarrow{FO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{FO_1}\right) \equiv -\pi/2\ [2\pi]$, alors d'après la propriété caractéristique,

r'(F) = F , donc F est le centre de r'.

3) a- [DF] et [OO_1] n'ont pas la même médiatrice, donc g n'est pas une symétrie orthogonale, elle est alors une symétrie glissante.

g(D) = F , donc le milieu O de [DF] appartient à l'axe de g.

g(O) = O_1 , donc le milieu de OO_1 appartient à l'axe de g.

L'axe de g est alors la droite (OO_1).

O est un point de l'axe de g et g(O) = O_1 donc $\overrightarrow{OO_1}$ est le vecteur de g,

Et par suite g = $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ o$S_{(OO_1)}$ = $S_{(OO_1)}$o$t_{\overrightarrow{OO_1}}$.

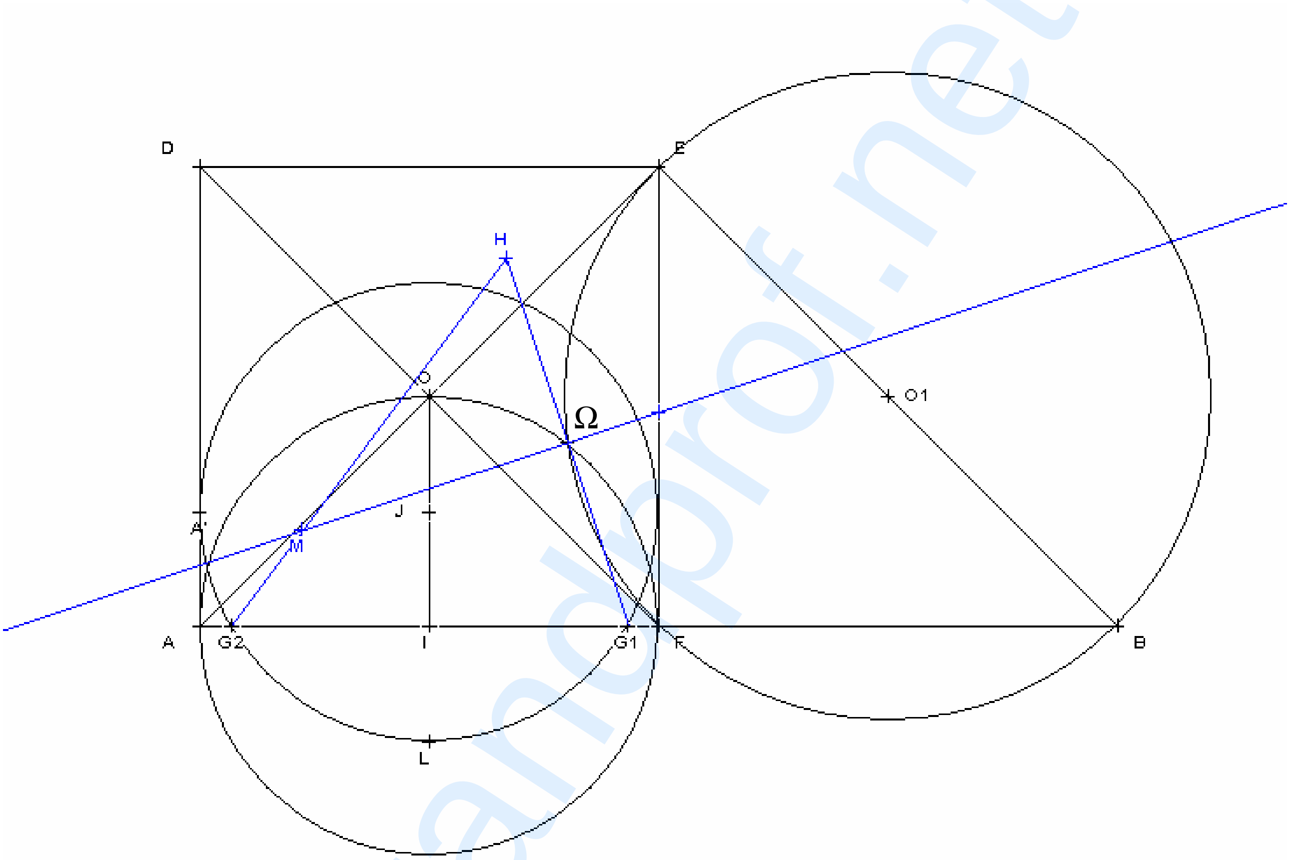
b- g(M) = r' (M) $\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}} o S_{(OO_1)}(M) = t_{\overrightarrow{OO_1}} o r^{-1}(M) \Leftrightarrow S_{(OO_1)}(M) = r^{-1}(M) \Leftrightarrow$

$r o S_{(OO_1)}(M) = M$

$\Leftrightarrow$ f(M) = M

c- g(M) = r' (M) $\Leftrightarrow$ f(M) = M . Ainsi l'ensemble des points M tels que g(M) = r' (M) est la droite (OE).

B –



1) a- L'angle de s est $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FE}}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$. Le rapport de s est $\frac{FE}{AB} = \frac{1}{2}$

b- $r o h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}(A) = r(A) = F$ et $r o h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}(B) = r(F) = E$.

donc s et $r o h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$ sont deux similitudes directes qui coïncident en deux points distincts ,

par suite $s = r o h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$

2) a- s est de centre Ω et d'angle π/2, et s(A) = F donc $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega F}}\right) \equiv \pi/2\ [2\pi]$, et par suite

Ω appartient au cercle de diamètre [AF] . de même s(B) = E donc $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv$ π/2 [2π],

et donc Ω appartient au cercle de diamètre[BE]

Comme s(A) = F alors F n'est pas le centre de s. Par suite Ω est le second point d'intersection

(autre que F) des deux cercles de diamètres [AF] et [BE].

b- s(E) = r o $h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$ (E) = r(O) = O

sos est une similitude directe de centre Ω, et d'angle π/2 + π/2 = π. Or sos(B) = s(E) = O

donc $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}}\right) \equiv \pi$ [2π] , et donc Ω, O et B sont alignés.

3) a- $B_1 = s(B_0) = s(B) = E$ et $B_2 = s(B_1) = s(E) = O$.

b- s est d'angle π/2 ; $s(B_{n-1}) = B_n$ et $s(B_n) = B_{n+1}$, donc $\left(\widehat{\overrightarrow{B_{n-1}B_n}, \overrightarrow{B_nB_{n+1}}}\right) \equiv$ π/2 [2π]

par suite $B_{n-1}\,B_n\,B_{n+1}$ est rectangle en B_n

sos est de centre Ω et d'angle = π ; comme $sos(B_{n-1}) = s(B_n) = B_{n+1}$

alors $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B_{n-1}}, \overrightarrow{\Omega B_{n+1}}}\right) \equiv \pi$ [2π] donc les points B_{n-1} , Ω et B_{n+1} sont alignés.

c- B_{n+1} est le point d'intersection de la perpendiculaire en B_n à $(B_n B_{n-1})$ avec (ΩB_{n-*1}).

4) a- s est de rapport 1/2 ; $s(B_{n-1}) = B_n$ et $s(B_n) = B_{n+1}$ donc $\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n-1}B_n} = 1/2$; par suite $\frac{d_n}{d_{n-1}} = 1/2$

La suite (d_n) est donc géométrique de rapport 1/2 .

b- $d_0 = B_0\,B_1$ = BE = $4\sqrt{2}$, donc $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} d_k = 4\sqrt{2}\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = 8\sqrt{2}$

C-

1) Si dans un repère orthonormé, l'équation réduite de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0) alors

$c^2 = a^2 - b^2$, et donc $a^2 = c^2 + b^2$ et on a

IF = a, IJ = b et IG = c. (G est l'un des foyers de l'ellipse) donc $JG^2 = JI^2 + IG^2 = b^2 + c^2 = a^2$ par suite JG = a. ainsi :

Le cercle de centre J et de rayon IF coupe (AF) en G_1 et G_2

2)a- G_1 est un foyer,

Le cercle de diamètre [AF] est le cercle principal de l'ellipse.

Ω appartient à ce cercle et ($\Omega G_1^{'}$) est perpendiculaire à (ΩG_1)

ainsi le projeté orthogonal du foyer G_1 sur ($\Omega G_1^{'}$) est le point Ω du cercle principal.

donc ($\Omega G_1^{'}$) est tangente à l'ellipse.

b- Soit H le symétrique du foyer G_1 par rapport à la tangente ($\Omega G_1^{'}$). Alors (G_2H) coupe ($\Omega G_1^{'}$) en M : point de contact de l'ellipse avec la tangente ($\Omega G_1^{'}$).