

**EXERCICE 1 (4 points)**

θ étant un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_{\theta}(z) = z^2 - (1 + e^{i\theta})z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$$

- 1) a – Vérifier que $f_{\theta}(1 + i) = 0$
 b – En déduire les solutions z' et z'' dans \mathbb{C} de l'équation $f_{\theta}(z) = 0$.
- 2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A, B et M d'affixes respectives $-1, i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.
 a – Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur un cercle (\mathcal{C}) de centre A dont on précisera le rayon.
 b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (\mathcal{C}) .

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un cercle \mathcal{C} de centre O et de diamètre $[AB]$. On désigne

par F le point de \mathcal{C} tel que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et par Δ la perpendiculaire à (AB) en A .

La tangente à \mathcal{C} en F coupe la droite Δ en un point A' . Soit \mathcal{P} la parabole de foyer F et de directrice (AB) .

- 1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole \mathcal{P} .
 b – Préciser la tangente à \mathcal{P} en A' .
- 2) Soit T la tangente à \mathcal{C} au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite $(A'F)$.
 Montrer que le triangle $A'OB'$ est rectangle.
- 3) Soit \mathcal{D} la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB) .
 a – Soit M un point de \mathcal{D} distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB) .
 Montrer que si M appartient à la parabole \mathcal{P} , alors $FMHK$ est un carré.
 b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite \mathcal{D} avec la parabole \mathcal{P} .

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + \text{Log}(1 + e^{-2x})$ et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- A – 1) a – Dresser le tableau de variation de f .
 b – Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est une asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
 c – Déterminer la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D}
 d – Tracer \mathcal{D} et \mathcal{C} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 2) a – Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[\text{Log } 2, +\infty[$
 b – Construire la courbe \mathcal{C}' représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f .

- 3) Soit n un élément de \mathbb{N}^*
 a – Montrer que pour tout t de $[0, +\infty[$ on a

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

- b – En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x$$

- c – En déduire un encadrement de $\text{Log}(1 + e^{-2n})$ pour tout t de $[0, +\infty[$

- 4) Pour tout n de \mathbb{N}^* , on désigne par S_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , la droite \mathcal{D} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

- a – Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{8} e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n}$

- b – Montrer que (S_n) est convergente vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

B – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^{\text{Log } 2} dx$ et pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n = \int_0^{\text{Log } 2} [f'(x)]^n dx$

- 1) Calculer u_0 et u_1 .
- 2) a – Montrer que pour x de $[0, \text{Log } 2]$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$
 b – En déduire que pour tout entier naturel n

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{Log } 2.$$

- c – Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- 3) a – Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a $1 - f''(x) = [f'(x)]^2$
 b – Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on a $u_n = u_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$
 c – En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$u_{2n} = u_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5}\right)^{2k}$$

- 4) Pour tout n de \mathbb{N}^* on pose $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k$
 Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on déterminera.