

Cahiers du baccalauréat 2006

Examen du baccalauréat

Epreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

SESSION PRINCIPALE 2006

Solutions de l'exercice 1 :

$$1) a) f_{\theta} (1+i) = 2i - (i + e^{i\theta}) (1+i) + (1+i) (-1 + e^{i\theta}) = 0$$

$$b) z' + z'' = \frac{-b}{a} \text{ d'où } z' + (1-i) = i + e^{i\theta} \text{ alors } z' = -1 - i + i + e^{i\theta} = -1 + e^{i\theta}$$

d'où $z' = -1 + e^{i\theta}$ et $z'' = 1 + i$

$$2) a) AM = |z_M - z_A| = |-1 + e^{i\theta} + 1| = |e^{i\theta}| = 1$$

Donc M varie sur le cercle de centre A et de rayon 1

b) (BM) est tangente au cercle (C) $\Leftrightarrow \overline{AM} \text{ et } \overline{BM}$ sont

orthogonaux. $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right) = \frac{\pi}{2} (\pi)$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} (\pi) \quad \Leftrightarrow \frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right) = 0$$

$$\text{Or } \frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A} = \frac{-1 + e^{i\theta} - i\sqrt{3}}{-1 + e^{i\theta} + 1} = \frac{-1 - i\sqrt{3} + e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{-i\theta} + 1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)} + 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) + 1 = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + 1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Comme $\theta \in [0, 2\pi[$ alors : (BM) est tangente an cercle (C) $\Leftrightarrow \theta \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$

2eme méthode :

la droite (BM) est tangente an cercle (C) $\Leftrightarrow \overline{AM}$ et \overline{BM} sont orthogonaux. $\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un cercle \mathcal{C} de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par F le point de \mathcal{C} tel que $\left(\overline{OB}, \overline{OF}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et par Δ la perpendiculaire à (AB) en A.

La tangente à \mathcal{C} en F coupe la droite Δ en un point A'. Soit \mathcal{P} la parabole de foyer F et de directrice (AB).

1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole \mathcal{P} .

b – Préciser la tangente à \mathcal{P} en A'.

2) Soit T la tangente à \mathcal{C} au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite (A'F).

Montrer que le triangle A'OB' est rectangle.

3) Soit \mathcal{D} la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB).

a – Soit M un point de \mathcal{D} distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).

Montrer que si M appartient à la parabole \mathcal{P} , alors FMHK est un carré.

b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite \mathcal{D} avec la parabole \mathcal{P} .

de quoi s'agit-il ?

Paraboles .

Tangentes à une parabole.

Construction des points d'intersection d'une parabole et d'une droite.

Solutions du problème :

Partie A :

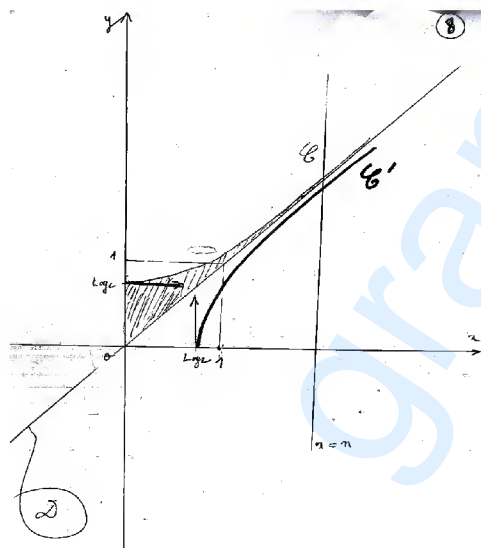
1) a) $f'(x) = 1 + \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1+e^{-2x} - 2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	Log2		$+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ donc D est asymptote à C au voisinage de $+\infty$

c) $f(x) - x = \text{Log}(1 + e^{-2x}) \neq 0$ donc C est au dessus de D.

d)



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f \pi [0, +\infty[\phi = [\text{Log}2, +\infty[$

b) (C') est le symétrique de (C) par rapport à D.

$$3) \text{ a) } 1-t - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2-1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \text{ donc } 1-t \leq \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

$$\frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ puisque } 1+t \geq 1 \quad \forall t \in [0, +\infty[\quad \text{donc } 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\text{b) d'après ce qui précède } 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\text{donc } \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt \text{ alors } \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2 \right]_0^x \leq [\text{Log}(1+t)]_0^x \leq x$$

Donc :

$$-\frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x$$

$$\text{c'est à dire } x - \frac{1}{2}x^2 \leq \text{Log}(1+x) \leq x$$

$$\text{c) d'après ce qui précède pour tout } x \in [0, +\infty[\quad x - \frac{1}{2}x^2 \leq \text{Log}(1+x) \leq x$$

$$\text{Donc pour } t \in [0, +\infty[\quad e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \leq \text{Log}(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$$

$$4) \text{ a) } S_n = \int_0^n (f(x) - x) dx = \int_0^n \text{Log}(1+e^{-x}) dx$$

$$\text{D'après ce qui précède, } e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} \leq \text{Log}(1+e^{-2x}) \leq e^{-2x}$$

Donc :

$$\int_0^n \left(e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} \right) dx \leq \int_0^n \text{Log}(1+e^{-2x}) dx \leq \int_0^n e^{-2x} dx$$

or

$$\int_0^n \left(e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} \right) dx = \int_0^n e^{-2x} dx - \frac{1}{2} \int_0^n e^{-4x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^n - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4}e^{-4x} \right]_0^n$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^{-4n} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n}$$

$$\text{et } \int_0^n e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^n = -\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors : } \frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$$

$$\text{b) } S_{n-1} - S_n = \int_0^{n+1} \text{Log}(1+e^{-2x}) dx - \int_0^n \text{Log}(1+e^{-2x}) dx$$

$$\int_n^{n+1} \text{Log}(1 + e^{-2x}) dx$$

Or $\text{Log}(1 + e^{-2x}) > 0$ car $1 + e^{-2x} > 1$ alors $\int_n^{n+1} \text{Log}(1 + e^{-2x}) dx \geq 0$

donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ alors S_n est croissante.

d'autre part et d'après ce qui précède a)

$$S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n} \text{ Donc } S_n \leq \frac{1}{2} \text{ c.â.d } S_n \text{ est majorée par } \frac{1}{2}$$

croissante et majorée S_n est convergente.

$$\text{Et puisque : } \frac{3}{8} - \frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{8} e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n} \text{ Alors, } \frac{3}{8} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-kn} = 0$$

Partie B :

$$1) U_0 = \int_0^{\text{Log}^2} dx = \text{Log} 2$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_0^{\text{Log}} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\text{Log}^2} = f(\text{Log} 2) - f(0) = \text{Log} 2 + \text{Log}(1 + e^{-2\text{Log}^2}) - \text{Log} 2 \\ &= \text{Log}(1 + e^{-\text{Log}^4}) = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \text{Log}\left(\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

$$2) a) \quad 0 \leq x \leq \text{Log} 2 \text{ donc } -2\text{Log} 2 \leq -2x \leq 0 \text{ d'ou } \frac{1}{4} \leq e^{-2x} \leq 1$$

$$\text{Alors } \frac{5}{4} \leq 1 + e^{-2x} \leq 2 \text{ et par suite } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + e^{-2x}} \leq \frac{4}{5} \text{ d'autre part}$$

$$0 \leq 1 - e^{-2x} \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{alors } a \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

$$b) \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5} \text{ donc } 0 \leq \int_0^{\text{Log}^2} [f'(x)]^n dx \leq \int_0^{\text{Log}^2} \left(\frac{3}{5}\right)^n dx \text{ d'où}$$

$$0 \leq U_n \leq (\text{Log} 2) \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$$

$$3) \text{ a) } 1 - f''(x) = 1 - \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)' = \frac{(1 + e^{-2x})^2 - [2e^{-2x}(1 + e^{-2x}) + (2e^{-2x})(1 - e^{-2x})]}{(1 + e^{-2x})^2}$$

$$= \frac{(1 + e^{-2x})^2 [-4e^{-2x}]}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{(1 - e^{-2x})^2}{(1 + e^{-2x})^2}$$

$$\text{b) } U_n = \int_0^{\text{Log } 2} (f'(x))^n dx$$

$$\text{Or } (f'(x))^n = (f'(x))^2 (f'(x))^{n-2} = (1 - f''(x))(f'(x))^{n-2} = (f'(x))^{n-2} - f''(x)(f'(x))^{n-2}$$

$$\text{Alors, } U_n = U_{n-2} - \left[\frac{1}{n-1} (f'(x))^{n-1} \right]_0^{\text{Log } 2} = U_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

$$\text{c) } U_{2n} = U_{2n-2} - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \text{ et } U_{2n+1} = U_{2n-1} - \frac{1}{2n} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n}$$

par itération (ou par récurrence) on obtient :

$$U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1} \text{ et } U_{2n-1} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$$

$$4) \quad V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{5} \right)^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1} = U_0 - U_{2n} + U_1 - U_{2n+1}$$

$$= (U_0 + U_1) - (U_{2n} + U_{2n+1})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = (U_0 + U_1), \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$= \text{Log } 2 + \text{Log } \frac{5}{4} = \text{Log } \frac{5}{2}$$