

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	Session principale	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	⌚ Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

☞ ☞ ☞ ☞ ☞ ☞

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

ξ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$

et ξ' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CM]$.

A et A' sont deux points du cercle ξ tels que $AMA'B$ est un losange et $(\widehat{AC}, \widehat{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

La droite (AC) recoupe le cercle ξ' en H.

- 1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.
- b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.
- c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.

2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.

- a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH) . En déduire $S(A')$.

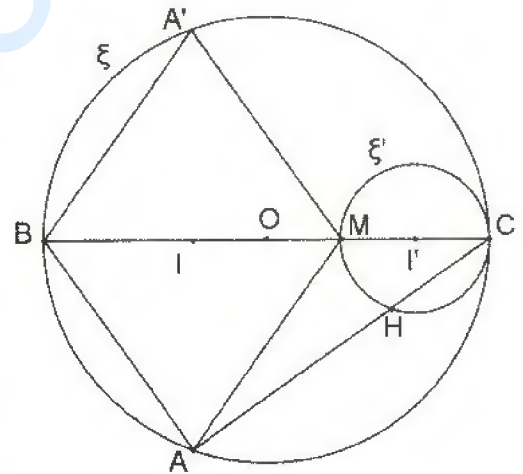
3) Montrer que $S(I) = I'$ et en déduire que (HI) est tangente en H au cercle ξ' .

4) On pose $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$.

a) Vérifier que S' est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.

b) La droite $(A'M)$ recoupe le cercle ξ en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.

c) Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle de S'.



Exercice 2 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,0,1)$, $B(-2,0,1)$, $C(1,1,1)$ et $D(-4,0,-1)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation $z = 1$.
- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$.
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre Ω .
b) Soit le point $I(0, 0, 1)$, montrer que S et P se coupent suivant le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon 2.
- 3) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\Omega_\lambda(0, 0, \lambda)$ et $R_\lambda = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$.
a) Montrer que la sphère S_λ de centre Ω_λ et de rayon R_λ coupe P suivant le cercle \mathcal{C} .
b) Déterminer λ_0 pour que $D \in S_{\lambda_0}$.
c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en S_{λ_0} .

Exercice 3 : (5 points)

- 1) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $29x - 13y = 6$.
a) Vérifier que $(2,4)$ est une solution de (E).
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans \mathbb{Z} l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$.

- 2) Justifier que $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ et en déduire que -8 est solution de (E').
- 3) Soit x_0 une solution de (E').
a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$.
b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis que $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$.
c) En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} de l'équation (E').
d) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $(x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$.

- 4) Résoudre dans \mathbb{Z} le système
$$\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}, \\ (x - 3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}. \end{cases}$$

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.

- 1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0, 1[$.
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$: $g(x) = -\ln(1 - x^2)$.
- c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution α sur $[0,7 ; 0,8]$.
- d) On donne en annexe la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha, \alpha)$.

On désigne par \mathcal{C}' la courbe de g . Tracer \mathcal{C}' dans le même repère.

- 2) Soit φ la fonction définie sur $[0, 1[$ par $\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$.
 - a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1[$ et que $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$.
 - b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à $[0, 1[$, $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$.
 - c) En déduire que $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in [0, 1[$.
 - d) On désigne par \mathcal{A} l'aire de la région du plan située entre les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
Montrer que $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right)$.

- 3) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k}$.

Soit $n \geq 1$. On pose pour tout $t \in [0, 1[$, $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$.

- a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = u_n$.
 - b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $S_n(t) = (1 - t^{2n}) g'(t)$, où g' est la dérivée de la fonction g sur $[0, 1[$.
 - c) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(1 - \frac{1}{3^n}) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$.
 - d) En déduire que $(1 - \frac{1}{3^n}) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq u_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3})$.
- 4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : N° d'inscription : Série :

Signatures des surveillants
.....
.....

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :



Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie

