CORRECTION : EPREUVE MATHEMATIQUES / Session de JUIN 2019 / BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) a) $(AB)\perp(AC)$, ζ' de diamètre $[CM]$ et $H\in\zeta'$ donc $(HC)\perp(MH)$ or $H\in(HC)$

donc $(AC)\perp(MH)$ ainsi $(AB)\parallel(MH)$

b) $AMA'B$ est un losange donc $(AB)\parallel(A'M)$ et $(AB)\parallel(MH)$ d'où $(A'M)\parallel(MH)$ ce qui prouve que H, M et A' sont alignés

c) • dans le triangle ABC on a $(AB)\parallel(MH)$, $H\in[AC]$ et $M\in[BC]$ donc d'après te théorème de Thalès : $\frac{CM}{CB}=\frac{HM}{AB}=\frac{CH}{AC}$ et on a $\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}$ donc $\frac{HM}{AB}=\frac{1}{3}$ par suite $HM=\frac{1}{3}AB$

• Le triangle AMH est rectangle en H donc d'après le théorème du Pythagore :

Et puisque $AB=AM$ on aura $AB^2=AH^2+HM^2\Rightarrow AH^2=AB^2-HM^2$

2°) a) • Angle de S: $\left(\overrightarrow{HA},\widehat{\ }\overrightarrow{HM}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

• Rapport de $S: k=\frac{HM}{HA}$. On a : $HM=\frac{1}{3}AB$ et $AH^2=AB^2-HM^2$

Donc $AH^2=AB^2-\frac{1}{9}AB^2=\frac{8}{9}AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AH^2}=\frac{9}{8} \Rightarrow \frac{AB}{AH}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

il en résulte : $k=\frac{HM}{HA}=\frac{AB}{3HA}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) • Angle de S est $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ d'où $S((AI))\perp(AI)$ et $S(A)=M\in S((AI))$ d'où $S((AI))=(BC)$

• De même $S((MH))\perp(MH)$ et $S(H)=H\in S((MH))$ d'où $S((MH))=(AC)$

• $A'\in(MH)\cap(AI)$ d'où $S(A')\in S((MH))\cap S((AI))\Rightarrow S(A')\in(AC)\cap(BC)\Rightarrow S(A')=C$

3°) • une similitude conserve les milieux

• I est le milieu de $[AA']$ donc $S(I)$ est le milieu de $S([AA'])=[CM]$ d'où $S(I)=I'$

• $S(I)=I'\Rightarrow\left(\overrightarrow{HI},\widehat{\ }\overrightarrow{HI'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $H\in\zeta'$ de rayon $[I'H]$ donc (HI) est tangente à ζ' en H

4°) a) $S_{(AH)}$: antidéplacement $\Rightarrow S_{(AH)}$ est une similitude indirecte de rapport 1

• S' est la composée de trois similitudes dont <u>deux indirectes</u> de rapport 1 et <u>une directe</u> de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ce qui prouve que S' est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$

• $S'(H)=S_{(AH)}\circ S\circ S_{(AH)}(H)=S_{(AH)}\circ S(H)=S_{(AH)}(H)=H\Rightarrow H$ est le centre de S'

b) • $\left(\overrightarrow{A'B},\widehat{\ }\overrightarrow{A'A}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'A},\widehat{\ }\overrightarrow{A'M}\right)[2\pi]$ ($[A'A)$ bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{A'B},\widehat{\ }\overrightarrow{A'M}\right)$)

• $\begin{cases}\left(\overrightarrow{A'B},\widehat{\ }\overrightarrow{A'A}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CB},\widehat{\ }\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\\ \left(\overrightarrow{A'A},\widehat{\ }\overrightarrow{A'M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\widehat{\ }\overrightarrow{CN}\right)[2\pi]\end{cases}$ (Deux angles qui interceptent le même arc dans le cercle)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{CB},\widehat{\ }\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\widehat{\ }\overrightarrow{CN}\right)[2\pi]$ ainsi dans le triangle MNC , $\left(\overrightarrow{CM},\widehat{\ }\overrightarrow{CH}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CH},\widehat{\ }\overrightarrow{CN}\right)[2\pi]$

Donc $[CH]$ est la bissectrice de l'angle $N\hat{C}M$ et $(CH)\perp(MN)$ d'où (CH) est la médiatrice de $[MN]$

$\Rightarrow CM = CN$ ce qui prouve que MNC est isocèle en C

c) • $S'(A) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(A) = S_{(AH)} \circ S(A) = S_{(AH)}(M) = N$

• $S'(A) = N \Rightarrow$ angle de $S' : \left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HN}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

<u>Exercice N°2:</u>

1°) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{-4}{-1} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow A$, B et C ne sont pas alignés

b) $z_A = 1 \Rightarrow A \in P$, $z_B = 1 \Rightarrow B \in P$, $z_C = 1 \Rightarrow C \in P$
et A , B et C déterminent un seul plan P donc il a pour équation $z = 1$

<u>Ou bien :</u> $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normale de P

$\Rightarrow -4z + d = 0$, $A \in P \Rightarrow -4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$ d'où $P : -4z + 4 = 0 \Rightarrow P : z = 1$

2°) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$

$\Rightarrow S$ est une sphère de rayon $R = \sqrt{5}$ et de centre $\Omega(0,0,2)$

b) $d(\Omega, P) = \frac{|z_\Omega - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{1} = 1 < \sqrt{5} \Rightarrow S$ et P sont sécants suivant le cercle ζ de rayon $\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = 2$

Comme $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -\vec{n} \Rightarrow (\Omega I) \perp P$ et $I \in P$ donc I est le projeté orthogonale de Ω sur P

Ce qui prouve que I est le centre de ζ

3°) a) $d(\Omega_\lambda, P) = \frac{|z_{\Omega_\lambda} - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = |\lambda - 1|$

On sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a : $(\lambda-1)^2 < (\lambda-1)^2 + 4$ d'où $\sqrt{(\lambda-1)^2} < \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4}$

C'est-à-dire $|\lambda - 1| < \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4} \Rightarrow |\lambda - 1| < R_\lambda \Rightarrow S_\lambda$ et P sont sécants suivant un cercle ϕ

• de rayon $r = \sqrt{R_\lambda^2 - |\lambda - 1|^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4 - (\lambda-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

• de centre le projeté orthogonale de Ω_λ sur P ; $\overrightarrow{\Omega_\lambda I}\begin{pmatrix}0\\0\\1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\vec{n} \Rightarrow (\Omega_\lambda I) \perp P$ et $I \in P$

$\Rightarrow I$ est le centre de ϕ. Finalement $\phi = \zeta$ et par suite $S_\lambda \cap P = \zeta$

b) $D \in S_{\lambda_0} \Rightarrow \Omega_{\lambda_0} D = R_{\lambda_0} \Rightarrow \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-1-\lambda_0)^2} = \sqrt{(\lambda_0 - 1)^2 + 4}$

$\Rightarrow \lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 17 = \lambda_0^2 - 2\lambda_0 + 5 \Rightarrow 4\lambda_0 = -12 \Rightarrow \lambda_0 = -3$

c) S_{λ_0} à pour centre $\Omega_{\lambda_0}(0,0,-3)$ et de rayon $R_{\lambda_0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
Soit h l'homothétie de centre M et de rapport k qui envoie S en S_{λ_0}

On a : $h(S)=S_{\lambda_0}$ donne $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}$ et $R_{\lambda_0}=|k|R$

$2\sqrt{5}=|k|\sqrt{5}\ \Rightarrow |k|=2$ donc $k=2$ ou $k=-2$

- Pour $k=2$ on a : $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}\ \Rightarrow \begin{cases}-x_M=-2x_M\\-y_M=-2y_M\\-3-z_M=-2(2-z_M)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M=0\\y_M=0\\-3z_M=-1\end{cases}\Rightarrow M\left(0,0,\dfrac{1}{3}\right)$

- Pour $k=-2$ on a : $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}\ \Rightarrow \begin{cases}-x_M=2x_M\\-y_M=2y_M\\-3-z_M=2(2-z_M)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M=0\\y_M=0\Rightarrow M(0,0,7)\\z_M=7\end{cases}$

<u>Conclusion :</u> il existe deux homothéties h_1 de centre $M\left(0,0,\dfrac{1}{3}\right)$ et de rapport 2 , h_2 de centre $M(0,0,7)$ et de rapport (-2) qui transforment S en S_{λ_0}

Exercice N°3 :

1°) a) $29\times2-13\times4=58-52=6$

b) • $29x-13y=29\times2-13\times4\Leftrightarrow 29(x-2)=13(y-4)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $29(x-2)$ et $29\wedge13=1$ divise 6 donc d'après lemme de Gauss

13 divise $(x-2)$ ainsi $x-2=13k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=2+13k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

• $29(13k)=13(y-4)\ \Leftrightarrow\ 29k=y-4\ \Leftrightarrow\ y=4+29k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

<u>Conclusion :</u> $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+13k,4+29k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2°) • 29 est un nombre premier et 29 ne divise pas 2

D'où d'après le petit théorème de Fermat on a : $2^{29-1}\equiv1[\text{mod }29]\Rightarrow 2^{28}\equiv1[\text{mod }29]$

• $\begin{cases}2^{28}\equiv1[\text{mod }29]\\2^{29}\equiv2[\text{mod }29]\end{cases}\Rightarrow 2^{28}\times2^{29}\equiv2[\text{mod }29]\ \Rightarrow 2^{57}\equiv2[\text{mod }29]\ \Rightarrow -2^{57}\equiv-2[\text{mod }29]$

$\Rightarrow(-2)^{57}\equiv-2[\text{mod }29]\ \Rightarrow\left((-2)^3\right)^{19}\equiv-2[\text{mod }29]\ \Rightarrow(-8)^{19}\equiv-2[\text{mod }29]$

• Donc -8 est solution de (E')

3°) a) • Si x_0 est un multiple de 29 alors $x_0^{19}\equiv0[\text{mod }29]$ donc x_0 n'est pas solution de (E')

D'où si x_0 est solution de (E') alors x_0 n'est pas multiple de 29

• $x_0^{19}\equiv1[\text{mod }29]\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0^{28}\equiv1[\text{mod }29]\quad\text{(Petit théorème de Fermat)}\\ \text{29 est un nombre premier}\end{array}\right.$

b) • x_0 est solution de (E') alors $x_0^{19}\equiv-2[\text{mod }29]\ \Rightarrow\left(x_0^{19}\right)^3\equiv(-2)^3[\text{mod }29]$

$\Rightarrow\left(x_0^{19}\right)^3\equiv(-2)^3[\text{mod }29]\ \Rightarrow x_0^{57}\equiv-8[\text{mod }29]$

• $\begin{cases}x_0^{57}\equiv-8[\text{mod }29]\ \Leftrightarrow\ x_0\times x_0^{56}\equiv-8[\text{mod }29]\\ \left(x_0^{28}\right)^2\equiv1[\text{mod }29]\ \Leftrightarrow\ x_0^{56}\equiv1[\text{mod }29]\end{cases}$

c) x est solution de $(E')\ \Rightarrow x\equiv-8[\text{mod }29]\ \Rightarrow x=-8+29k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement : $x=-8+29k\ \Rightarrow x\equiv-8[\text{mod }29]\ \Rightarrow x^{19}\equiv(-8)^{19}[\text{mod }29]$

et -8 est solution de (E') c'est-à-dire $(-8)^{19}\equiv-2[\text{mod }29]$

Donc $x^{19} \equiv -2[\mathrm{mod}\,29] \Rightarrow x$ est solution de (E')

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}} = \{-8+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $(x-3)^{19} \equiv -2[\mathrm{mod}\,29] \Leftrightarrow x-3$ est solution de $(\mathrm{E}') \Leftrightarrow x-3 = -8+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -5+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{-5+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

4°) • $(x-3)^{19} \equiv -2[\mathrm{mod}\,29] \Leftrightarrow x-3 \equiv -8[\mathrm{mod}\,29]$

• On a 13 ne divise pas $x-3$ donc $(x-3)^{12} \equiv 1[\mathrm{mod}\,13] \Leftrightarrow x-3 \equiv -2[\mathrm{mod}\,13]$

D'où $\begin{cases}(x-3)^{19} \equiv -2[\mathrm{mod}\,29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2[\mathrm{mod}\,13]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \equiv -8[\mathrm{mod}\,29] \\ x-3 \equiv -2[\mathrm{mod}\,13]\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \equiv -8+29p \\ x-3 \equiv -2+13q\end{cases},\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x = -5+29p \\ x = 1+13q\end{cases},\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow x-x = -5+29p-1-13q \Leftrightarrow 0 = -6+29p-13q \Leftrightarrow 29p-13q = 6\ ;\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

D'où p et q sont solutions de (E). Ainsi : $p = 2+13k$ et $q = 4+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Par suite $x = -5+29(2+13k) = 53+377k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{53+377k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice N°4 :

1°) a) $\mathrm{f}'(x) = \dfrac{(1-e^{-x})'}{2\sqrt{1-e^{-x}}} = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} > 0$, f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

et $\mathrm{f}([0,+\infty[) = \left[\mathrm{f}(0), \lim\limits_{+\infty}\mathrm{f}\right[= [0,1[\Rightarrow$ f possède une fonction réciproque g définie sur $[0,1[$

b) $y \in [0,+\infty[\ , x \in [0,1[\ , g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-y}} = x \Leftrightarrow 1-e^{-y} = x^2$

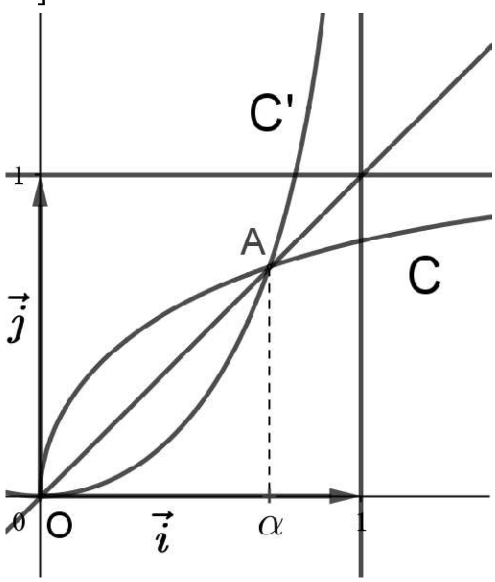
$\Leftrightarrow e^{-y} = 1-x^2 \Leftrightarrow -y = \ln(1-x^2) \Leftrightarrow y = -\ln(1-x^2) \Leftrightarrow g(x) = -\ln(1-x^2)$

c) $g(x) = x \Leftrightarrow g(x)-x = 0$, on pose $h(x) = g(x)-x\ , x \in [0,1[$, h est continue sur $[0,1[$

et $h(0,7) \times h(0,8) \simeq (-0,0267) \times 0,222 \simeq -0,0059 < 0$

Donc $h(x) = 0\ (g(x) = x)$ admet une solution $\alpha \in [0.7;0.8]$

d) Voir figure annexe



2°) a) f est continue sur $[0,+\infty[$, g est dérivable sur $[0,1[$

et $g([0,1[) = [0,+\infty[$ d'où φ est dérivable sur $[0,1[$

et $\varphi'(x) = g'(x)\mathrm{f}(g(x))$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \dfrac{2x}{1-x^2} \times x = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$

b) $a + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{1-x} = \dfrac{a(1+x)(1-x)+b(1-x)+c(1+x)}{(1+x)(1-x)}$

$= \dfrac{-ax^2 + x(c-b)+a+b+c}{(1+x)(1-x)}$

$\dfrac{2x^2}{1-x^2} = a + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases}-a = 2 \\ c-b = 0 \\ a+b+c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -2 \\ c = b = 1\end{cases}$

c) $\varphi'(x) = -2 + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow \varphi(x) = -2x + \ln(1+x) - \ln(1-x) + cte$

$\varphi(0) = \int_0^{g(0)} f(x)dx = \int_0^0 f(x)dx \Rightarrow cte = 0$ donc $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in [0,1[$

d) $\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx$ (unité d'aire)

- Par raison de symétrie
  $\int_0^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx = 2\int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx = 2\left[\int_0^{\alpha} f(x) dx - aire(OAB)\right]$; $B(\alpha, 0)$
- $\int_0^{\alpha} f(x)\, dx \rightarrow$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ et $aire(OAB) = \dfrac{OB \times AB}{2} = \dfrac{\alpha^2}{2}$
- On sait que $g(\alpha) = \alpha$ d'où $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{g(\alpha)} f(x) dx = \varphi(\alpha)$ il résulte $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$

3°) a) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 2\left(\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1}\right) dt = \sum_{k=1}^{n}\left(2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} t^{2k-1} dt\right)$

et $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} t^{2k-1} dt = 2\left[\dfrac{t^{2k}}{2k}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k}}{k} = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}^2}\right)^{k}}{k} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k}}{k} = \dfrac{1}{k.3^k} \Rightarrow \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k.3^k} = u_n$

b) $S_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1} = \dfrac{2}{t}\sum_{k=1}^{n}(t^2)^k$ et $\sum_{k=1}^{n}(t^2)^k = t^2 \times \dfrac{1-(t^2)^n}{1-t^2}$ Somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme t^2 de raison t^2

Par suite $S_n(t) = \dfrac{2}{t} \times t^2 \times \dfrac{1-t^{2n}}{1-t^2} = (1-t^{2n})\dfrac{2t}{1-t^2} = (1-t^{2n})g'(t)$, $n \geq 1$ et $t \in [0,1[$

c) $0 \leq t \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 \leq t^{2n} \leq \dfrac{1}{3^n} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{3^n} \leq 1 - t^{2n} \leq 1 \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq (1 - t^{2n}) g'(t) \leq g'(t)$

car $g'(x) \geq 0$

D'où pour $0 \leq t \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ on a : $\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$ (*)

d) On intégrant membre à membre l'inégalité (*) on aura :

$\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g'(t) dt \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g'(t) dt \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)[g(t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq u_n \leq [g(t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

D'où $\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)\left(g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_{0}\right) \leq u_n \leq g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_{0} \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4°) $\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\dfrac{1}{3^n}}_{0}\right) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ln\left(1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = -\ln\dfrac{2}{3} = \ln\dfrac{3}{2}$

Donc la suite (u_n) converge vers $\ln\dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$