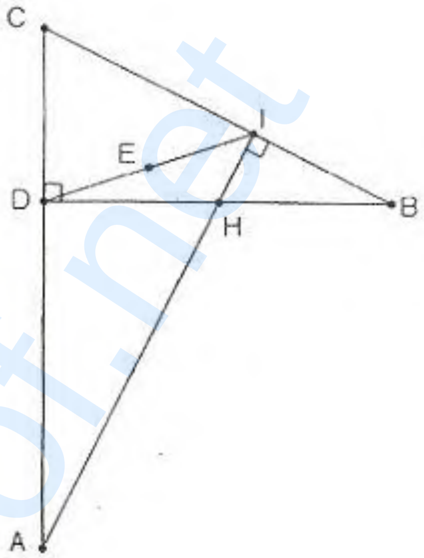
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $DB = 2DC$;
- le point H est le milieu du segment $[DB]$;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;
- le point E est le milieu du segment $[ID]$;
- les droites (IH) et (CD) se coupent au point A.

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\tan\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF).

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 2 (3 points)

Soit θ un réel non nul.
Dans la **figure 1** de **l'annexe** jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \theta\,[2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$;
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\, e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}\, e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E).
Déterminer z_B.

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD\, e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.
c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Dans la **Figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ'.

Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $u_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t \, dt$ et $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)\, dt$.

1) a) Montrer que $u_n>0$.

b) Montrer que $0<u_n\leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Montrer que $u_{n+1}=e-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}-(n+1)\,u_n$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\,u_n=e$.

2) a) Montrer que $-\frac{u_n}{e}\leq v_n\leq 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Vérifier que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$, $f(t)=t\,f'(t)-t$.

Montrer alors que $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t)\, dt-u_{n+1}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)\,v_n=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}-v_{n+1}-u_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)\,v_n=0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e},1\right]$ tel que $f(\alpha_n)=\frac{v_n}{u_n}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

Exercice 4 (5 points)

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 8)$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls (m,n,q) tels que $2^{2m}+3^{2n}=q^2$.**

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m,n,q) est un élément de A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2-3^{2n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 8)$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d=(q-3^n)\wedge(q+3^n)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d=2$.

c) Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=2^{2m-1}$.

En déduire que $q=2^{2m-2}+1$ et que $3^n=2^{2m-2}-1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m=2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ......

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - **Session principale - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

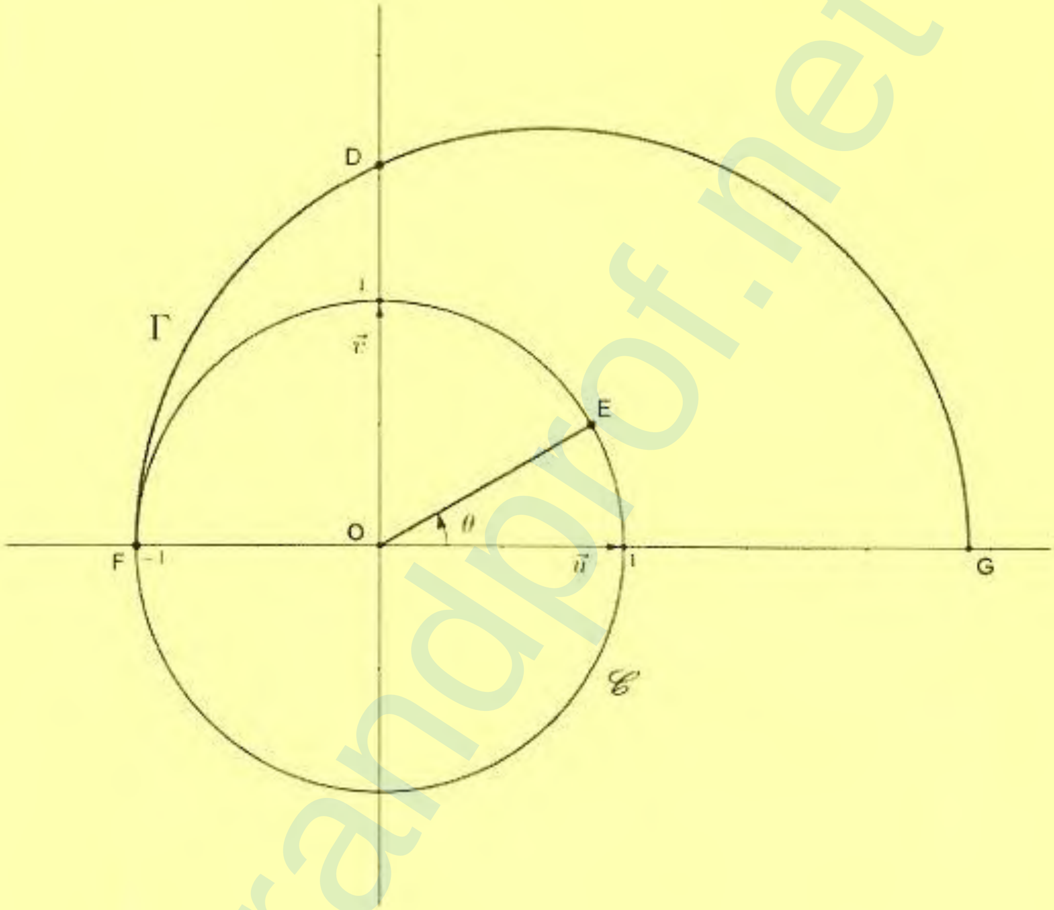


Figure 1

Ne rien écrire ici

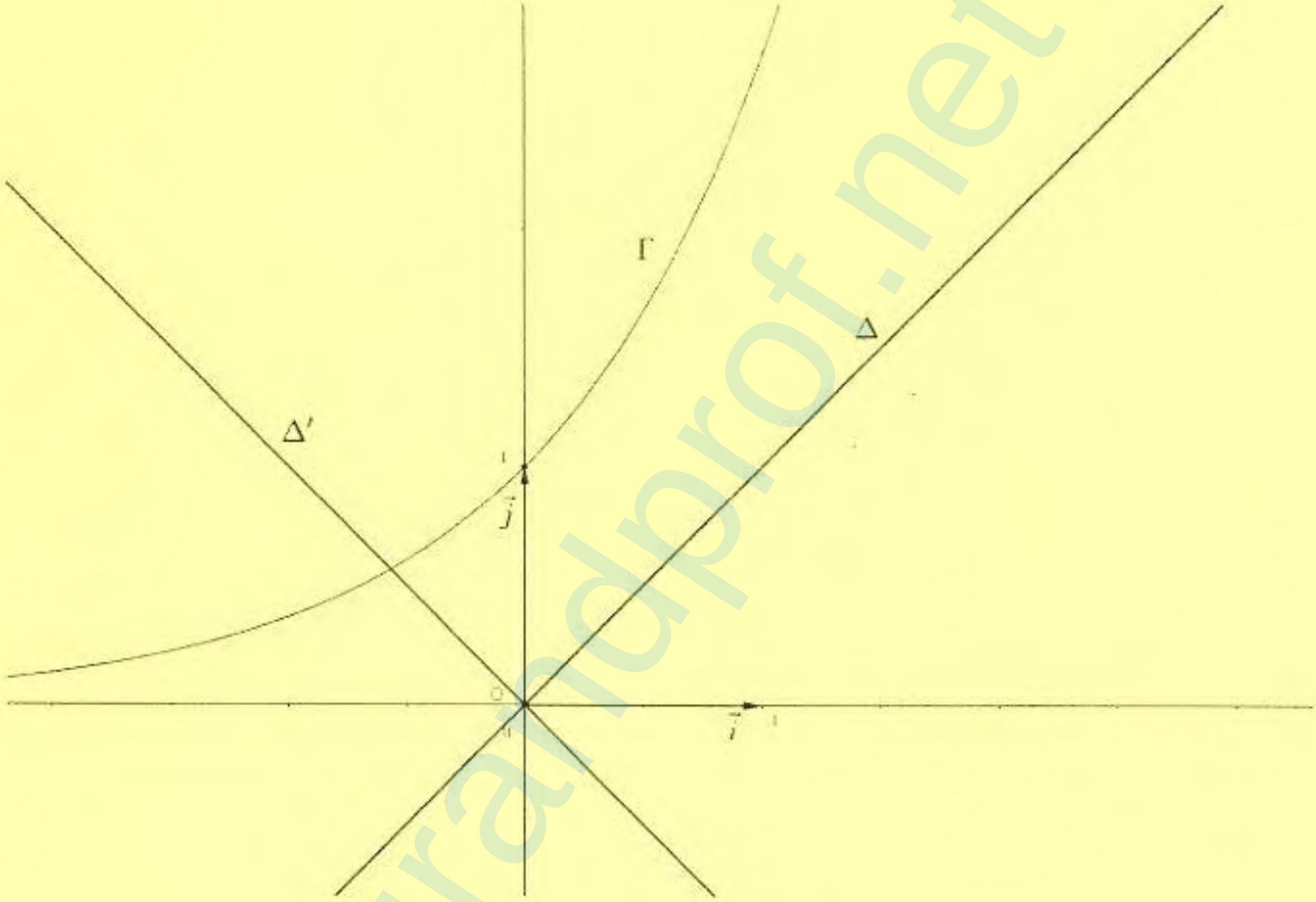


Figure 2