REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2006

SESSION PRINCIPALE

SECTION : ECONOMIE ET GESTION
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 2

Exercice 1 : (6 points)

Soit la suite U définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$

1) a – Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 1$.
b – Montrer que la suite U est décroissante.
c – En déduire que la suite U est convergente.

2) On considère la suite V définie sur ℕ par $V_n = 3 + \dfrac{1}{U_n - 1}$
a – Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
b – Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ pour tout entier naturel n.
c – Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 : (6 points)

Le service de production d'une entreprise est formé de 8 techniciens (5 hommes et 3 femmes), de 6 ouvriers qualifiés (2 hommes et 4 femmes) et de 2 ingénieurs (un homme et une femme).

Cette entreprise décide d'envoyer, en stage de formation, un groupe de 3 personnes de ce service. Chaque personne a la même probabilité d'être envoyée en stage.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le groupe envoyé est formé de trois femmes ».
B : « Le groupe envoyé est formé seulement d'ouvriers qualifiés».
C : « un seul technicien et un seul ouvrier qualifié font partie du groupe envoyé».

2) Calculer la probabilité pour que les 3 personnes envoyées en stage soient des femmes sachant qu'elles sont des ouvrières qualifiées.

3) L'entreprise décide d'attribuer à chaque personne envoyée en stage la somme de 1000 dinars si elle est un ingénieur et de 800 dinars sinon.
On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur les sommes possibles attribuées par l'entreprise aux 3 personnes envoyées en stage.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Problème : (8 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\text{Log } x)^2 - 2 \text{ Log } x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A – 1) a – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
b – Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a – Montrer que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{2}{x}(-1 + \text{Log } x)$
b – Dresser le tableau de variation de f.

3) a – Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.
b – En déduire les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

4) a – Vérifier que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $\dfrac{(\text{Log } x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\text{Log }\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$
b – En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) Construire $(\mathscr{C})$.

B – On considère les intégrales $I = \int_1^{e^2} \text{Log } x \, dx$ et $J = \int_1^{e^2} (\text{Log } x)^2 \, dx$.

1) a – En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I = 1 + e^2$.
b – Montrer que $J = 4e^2 - 2I$.

2) Calculer alors la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.