

## Section: Sciences de l'informatique

Session principale 2009

## Matière : Mathématiques ( Corrigé )

Exercice 1 ( 4 points )

Cet exercice porte sur la partie « Graphe » qui est supprimée du programme officiel de la section « Sciences de l'informatique » à partir de l'année scolaire 2009/2010.

Exercice 2 ( 3,5 points )

✓ **Contenu** : Arithmétique.

✓ **Aptitudes visées** : Connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ ,

Calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , des équations du type:  $ax + by = c$ .

✓ **Corrigé** :

1) (E) :  $2x + 3y = 5$ . On remarque que le couple (1,1) est une solution particulière de (E)

On a 
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ (2x - 2) + (3y - 3) &= 5 - 5 \end{aligned}$$
 d'où  $2(x - 1) = 3(1 - y)$  on en déduit que 3 divise  $2(x - 1)$ ,

or  $3 \nmid 2$ , d'après le lemme de Gauss on a 3 divise  $(x - 1)$

ainsi  $x = 3k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  par suite  $y = 1 - 2k$ . Par vérification, on a

$2(1 + 3k) + 3(1 - 2k) = 5$  d'où  $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1 + 3k, 1 - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) 
$$\begin{aligned} n - 8 &= 2(a - 3) & n &= 2a - 6 \\ n - 3 &= 3(b - 3) + 3 & n &= 3b - 3 \end{aligned}$$

b)

$$2a - 3b = n + 8 - (n + 3) = n + 8 - n - 3 = 5$$

$(a, -b)$  est une solution de (E) alors  $a = 1 + 3k$  et  $-b = 1 - 2k$   $k \in \mathbb{Z}$

$$n = 2a - 8 = 2(1 + 3k) - 8 = 6(k - 1)$$

d'où n est un multiple de 6 compris entre 50 et 55.

$$50 < -6 + 6k < 55 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \frac{56}{6} < k < \frac{61}{6} = 10,16 \quad \text{d'où } k = 10$$

$$\text{donc } n = 54, \quad a = 1 + 3k = 31 \quad \text{et } b = 2k - 1 = 19$$

**Exercice 3 ( 4,5 points )**

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé :**

1)a)  $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$

b)  $D \notin = 1 - (1 - i) - 4i = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$

d'où  $z_1 = 1 - i$  et  $z_2 = -2$

2)a)  $S_I(A) = C \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 0 - 1 = -1 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2 + 1 = 3 \end{cases}$  d'où  $z_C = -1 + 3i$  ;  $C(-1 + 3i)$

$S_I(B) = D \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 0 + 2 = 2 \\ y_D = 2y_I - y_B = 2 - 0 = 2 \end{cases}$  d'où  $z_D = 2 + 2i$  ;  $D(2 + 2i)$

b)  $I = A * C = B * D \hat{=} ABCD$  est un parallélogramme

$AB = |z_2 - z_1| = |-3 + i| = \sqrt{10}$  et  $AD = |z_D - z_1| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$  donc  $AB = AD$

$AB \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} ; AD \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad AB \times AD = 0$

Conclusion :  $\begin{cases} ABCD \text{ est un parallélogramme} \\ AB = AD \\ AB \wedge AD \end{cases}$  donc ABCD est un carré

**Exercice 4 ( 5 points )**

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :**
  - Exploiter la courbe d'une fonction pour lire : des images, des nombres dérivés, des limites, et le sens de variation.
  - Reconnaître qu'une fonction est la primitive d'une fonction donnée, calculer une intégrale, calculer une aire plane.

✓ **Corrigé :**

1)a)  $f(0) = -1$  et  $f'(0) = 0$

b)

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$f(3)$	$0$

2)a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x} = (-x^2 + (2 - a)x + a - b)e^{-x}$$

b)  $f(0) = b$  et  $b = -1$  ;  $f'(0) = a - b = 0 \Rightarrow a = 1$

d'où pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$

3)a)  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

$$F'(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x)e^{-x} = (x^2 - x - 1)e^{-x} = f(x)$$

b)  $A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = 0 - (-1 - 1)e^{-1} = \frac{2}{e}$

**Exercice 5 ( 3 points )**

✓ **Contenu :** Probabilité uniforme, événements indépendants, variable aléatoire.

✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un événement, interpréter la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

✓ **Corrigé :**

1)a)  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,0003$

b) Soit l'évènement  $D$  : « La calculatrice est défectueuse »

$$p(D) = p(A \cup B) - p(A) - p(B) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) - p(A) - p(B) = 0,01 + 0,03 - 0,0003 - 0,0397$$

2) Soit  $X$  : le nombre de calculatrices défectueuses.

$$p(X = 2) = C_{20}^2 (p(D))^2 (1 - p(D))^{18} = 0,144$$

3)  $p(X \geq 1) < 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) < 0,5 \Leftrightarrow 1 - (0,9603)^n < 0,5 \Leftrightarrow (0,9603)^n > 0,5$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9603) > \ln 0,5 \quad (x \mapsto \ln x \text{ est décroissante})$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{-\ln 0,5}{\ln(0,9603)} \approx 17,11 \text{ d'où le nombre maximum de calculatrices est } 17$$