Corrigé (Mathématiques)

Section : Sciences de l'Informatique **Session de contrôle 2008**

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.

1)a) $OA = OB = \sqrt{2} \Rightarrow OAB$ est isocèle rectangle en A.

b) Pour que OABC soit un carré il suffit que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow -1+i = z_C - (1+i) \Leftrightarrow z_C = 2i$

2)a) $(1+i)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow (1+i)^2 + ib(1+i) - 2 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{2-2i}{-(1-i)} = -2$

b) $z^2 - 2iz - 2 = 0$, $\Delta' = 1$

$S_{\mathbb{C}} = \{z_1 = 1+i \; ; \; z_2 = -1+i\}$

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un tableau de variation pour : donner des asymptotes; le signe d'une fonction, des solutions d'une équation, tracer la courbe d'une fonction.

1) a) Vrai b) Vrai c) Vrai d) Faux

2)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	||	$-$

3) a) $D_g = \{x \in D_f \; / \; |f(x)| \neq 0\}$

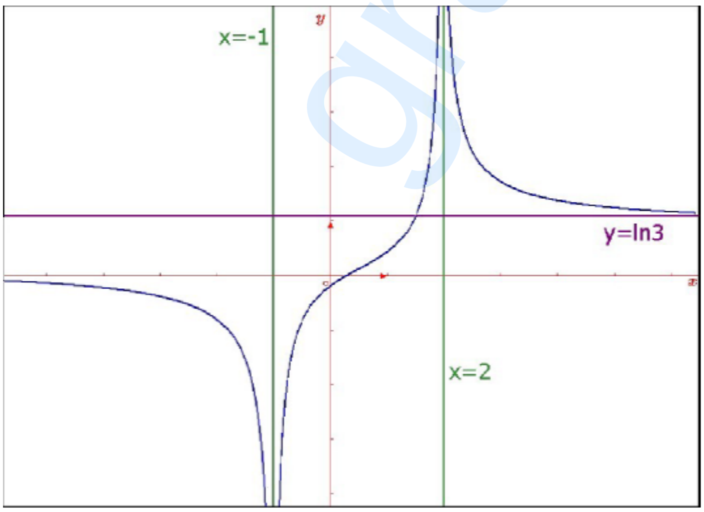
$Or \; D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \; et \; f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$d'où \; D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 \; ; \; 2\}$

b)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$\ln 3$

c)



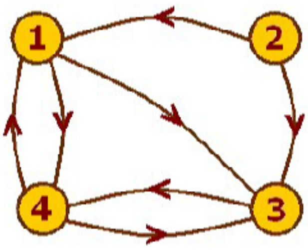
Exercice 3 :

- ✓ **Contenu : Graphes orientés.**
- ✓ **Aptitudes visées : Reconnaitre un graphe à partir de sa matrice associée, reconnaitre une chaine eulérienne.**

1)a) Trois arcs ; $\sum_{i=1}^{4} a_{i3} = 3$ **(arcs rentrants)**

b) Un seul arc ; $\sum_{j=1}^{4} a_{3j} = 1$ **(arcs sortants)**

2)



3) (2) → (3) → (4) → (1)

(2) → (1) → (4) → (1)

Exercice 4 :

- ✓ **Contenu : Arithmétique : résolution des équations du type : ax+by=c**
- ✓ **Aptitudes visées : Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z,**

Calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type : ax+by=c.

1)a) $11 \times 2 - 5 \times 4 = 2$

b) $\begin{cases} 11x - 5y = 2 \\ 11 \times 2 - 5 \times 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 11(x-2) = 5(y-4)$

c) $11 \wedge 5 = 1 \;\; donc \;\; (x-2) = 5k \Leftrightarrow x = 2 + 5k \;\; et \;\; y = 4 + 11k \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2+5k \,,\, 4+11k) \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$

2)a) $7a - 5b = 35n + 14 - 35n - 25 = -11$

$\mathrm{PGCD}(a,b) \;\; divise \;\; -11 \;\; d'où \;\; \mathrm{PGCD}(a,b) = 1 \;\; ou \;\; \mathrm{PGCD}(a,b) = 11$

b) $\begin{cases} 11 \; divise \; a \\ 11 \; divise \; b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11a' \\ b = 11b' \end{cases} (\mathrm{PGCD}(a',b') = 1) \Leftrightarrow 5n + 2 = 11a' \Leftrightarrow 11a' - 5n = 2$

$d'aprés \; 1) \;\; a' = 2 + 5k, \;\; n = 4 + 11k \quad k \in \mathbb{Z}$

$a = 11a' = 22 + 55k, \;\; b = 7n + 5 = 7(4+11k) + 5 = 77k + 33 \quad k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(22+55k \,,\, 33+77k) \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$