EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

SESSION PRINCIPALE – JUIN 2008

Exercice 1 (Q.C.M)

- **Contenus :**
  - Nombres complexes.
- **Aptitudes visées :**
  - Calculer ou transformer des expressions complexes.
  - Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul.
- **Corrigé :**

1) b)

2) a)

3) b)

Exercice 2

- **Contenus :**
  - Vecteurs de l'espace.
  - Produit scalaire dans l'espace.
  - Produit vectoriel dans l'espace, propriétés, distance d'un point à une droite, distance de deux droites, calcul de volumes.
- **Aptitudes visées :**
  - Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
  - Exploiter le produit scalaire dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
  - Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.

❖ **Corrigé :**

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-9\\18\\-9\end{pmatrix}=-9\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

2) Aire(ABC) = $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{9\sqrt{6}}{2}$.

3) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

4) a) Volume(ABCD) = $\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right\|=\frac{1}{6}\left(9\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{6}\right)=27$.

b) Aire (BCD) = $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=27$.

c) On note $\triangle(BCD)$ l'aire du triangle BCD et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

Volume(ABCD) = $\frac{AH\times\triangle(BCD)}{3}=\frac{27\times AH}{3}=9\times AH$.

D'où $AH=\frac{Volume(ABCD)}{9}=3$.

5) **Exercice 3**

❖ **Contenus :**

- Fonction exponentielle.
- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a,b] .

❖ **Aptitudes visées :**

- Reconnaître qu'une droite est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme.
- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Exploiter ou créer une représentation graphique pour déterminer ou estimer les solutions éventuelles d'une équation ou d'une inéquation.
- Reconnaître si une fonction du programme est dérivable en un point ou sur un intervalle.
- Déterminer la dérivée d'une fonction du programme sur un intervalle en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées de fonctions usuelles.
- Calculer une intégrale à l'aide d'intégration par parties.

- Reconnaître qu'une fonction est la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui s'annule en un réel a de I.
- Calculer une intégrale en utilisant une primitive.
- Calculer une aire plane.

❖ **Corrigé :**

I)

1) Comme la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Comme la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$ alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

2) Si m < 0 alors l'équation f(x) = m n'admet pas de solutions.
Si m = 0 alors l'équation f(x) = 0 admet une seule solution égale à 0.
Si $0 < m < 4e^{-2}$ alors l'équation f(x) = m admet 3 solutions distinctes.
Si $m = 4e^{-2}$ alors l'équation f(x) = m admet 2 de solutions distinctes.
Si $m > 4e^{-2}$ alors l'équation f(x) = m admet une seule solution.

II)

1) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 2xe^{-x} - f(x)$.

2) a) $I = \int_0^2 xe^{-x}dx$. On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$.
D'où $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.
Donc $I = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 = 1 - 3e^{-2}$.
b) $J = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(2xe^{-x} - f'(x)\right)dx = 2I - \int_0^2 f'(x)dx$.
c) $J = 2I - \left[f(x)\right]_0^2 = 2\left(1 - 3e^{-2}\right) - f(2) = 2 - 10e^{-2}$.

Exercice 4

❖ **Contenus :**

- Probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités totales.

❖ **Aptitudes visées :**

- Calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé.
- Calculer la probabilité d'un événement en utilisant la formule de BAYES et/ou la formule des probabilités totales.

❖ **Corrigé :**

1) P(E) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $P\left(\overline{E}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2) a) $P\left(A|E\right)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$.

$P\left(A|\overline{E}\right)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

b) $P(A)=P(A|E)\times P(E)+P\left(A|\overline{E}\right)\times P\left(\overline{E}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

c) $P\left(D|E\right)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ et $P\left(D|\overline{E}\right)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{10}$.

D'où $P(D)=P(D|E)\times P(E)+P\left(D|\overline{E}\right)\times P\left(\overline{E}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{30}$.