EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

SESSION DE CONTRÔLE – JUIN 2008

Exercice 1 (Q.C.M)

❖ Contenus :

- Fonction logarithme népérien.
- Suites réelles.
- Probabilités.

❖ Aptitudes visées :

- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Etudier la convergence d'une suite du programme.
- Calculer les caractéristiques d'une variable aléatoire et interpréter les résultats.

❖ Corrigé :

1) c)
2) a)
3) b)

Exercice 2

❖ Contenus :

- Opérations algébriques sur le corps des complexes, propriétés du conjugué, du module et de l'argument.
- Résolution d'équations de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.

❖ Aptitudes visées :

- Calculer ou transformer des expressions complexes.
- Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe.
- Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul
- Reconnaître que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux, à partir de leurs affixes.
- Résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.

❖ **Corrigé :**

1) a)$OACB$ est un losange équivaut à $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ et $OA=OB$.

On a $Aff\left(\overrightarrow{OA}\right)=\sqrt{3}+i$ et $Aff\left(\overrightarrow{BC}\right)=2i-\left(-\sqrt{3}+i\right)=\sqrt{3}+i$. D'où $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$.

$OA=\left|\sqrt{3}+i\right|=2$ et $OB=\left|-\sqrt{3}+i\right|=2$. Donc $OA=OB$.

Ainsi $OACB$ est un losange.

2) a) (E) : $z^2-2iz-4=0.\Delta'=3$.

$z'=i-\sqrt{3}$ et $z''=i+\sqrt{3}$.

Ainsi $S_1=\left\{\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}$.

b) $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3) $P(z)=z^3-4iz^2-8z+8i$.

a) $P(2i)=(2i)^3-4i(2i)^2-8(2i)+8i=-8i+16i-16i+8i=0$.

b) $P(z)=(z-2i)\left(z^2+mz+p\right)\Leftrightarrow P(z)=z^3+(-2i+m)z^2+(-2im+p)z-2ip$.

D'où :

$$\begin{cases}-2i+m=-4i\\ -2im+p=-8\\ -2ip=8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2i\\ p=-4\end{cases}$$

Ainsi $P(z)=(z-2i)\left(z^2+-2iz-4\right)$.

c)$P(z)=0\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+-2iz-4=0$

$\Leftrightarrow z=2i$ ou $z=\sqrt{3}+i$ ou $z=-\sqrt{3}+i$.

Ainsi $S_2=\left\{2i;\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}+i\right\}$

Exercice 3

❖ **Contenus :**

- Fonction logarithme népérien : Propriétés, limites usuelles.
- Etude et représentation graphique de fonctions du type $x\mapsto \ln(u(x))$, où u est une fonction du programme.
- Fonction exponentielle : Propriétés, limites usuelles.

❖ **Aptitudes visées :**

- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Reconnaître qu'une droite est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme.
- Déterminer une valeur exacte ou approchée d'une solution d'une équation de la forme f(x) = k , dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle.

- Reconnaître si une fonction du programme est dérivable en un point ou sur un intervalle.
- Déterminer la dérivée d'une fonction composée.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction du programme connaissant le signe de sa dérivée.
- Tracer la courbe représentative de la réciproque d'une fonction donnée.

❖ **Corrigé :**

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

Alors la courbe (C) admet une asymptote d'équation $x = 0$ et une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

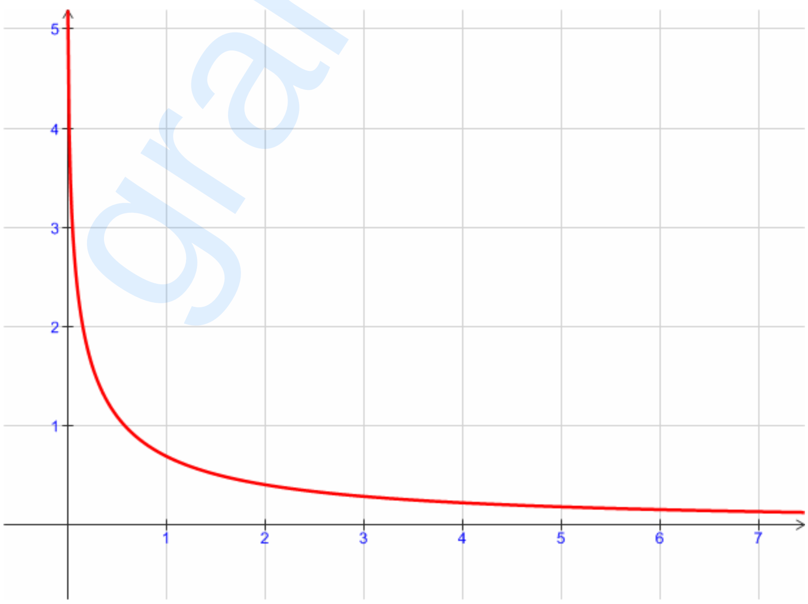
2) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{x(x+1)}$.

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[; x(x+1) > 0$.

Alors pour tout $x \in]0;+\infty[; f'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de *f*.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

3)



4) a) f étant continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, alors f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \in]0;+\infty[$, alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$ que l'on notera x_n.

b) $f(x_n) = \ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)} = 1$

Exercice 4

❖ **Contenus :**

- Vecteurs de l'espace.
- Produit vectoriel dans l'espace.
- Droites et plans de l'espace, équations, position relative.
- Sphère, section d'une sphère par un plan.

❖ **Aptitudes visées :**

- Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
- Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Déterminer la section d'une sphère par un plan.

❖ **Corrigé :**

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}; \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par suite $ABCD$ est un parallélogramme.

Aire ($ABCD$) = $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 9\sqrt{2}$.

2) a) $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$.

b) Comme $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, alors la droite (AI) estt perpendiculaire au plan P.

De plus $AI = \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 3\sqrt{2}$.

Alors le plan P est tangent à la sphère S au point A.