Section: Sciences Techniques *Session de contrôle 2009*

Matière : Mathématiques

Exercice n°1 (3 points)

- **Contenu :** Nombres Complexes, probabilité conditionnelle.
- **Aptitudes visées :** Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer le module et le conjugué d'un nombre complexe, appliquer la formule de la probabilité totale.
- **Corrigé :**

1) c) 2) b) 3) c) 4) b)

Exercice n°2 (6 points)

- **Contenu :** Nombres Complexes.
- **Aptitudes visées :** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, une équation du second degré ; connaitre la relation entre les racines d'une équation du second degré ; interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
- **Corrigé :**

1) a- $(3-i)^2 = 3^2 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.

b- $(E) : z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$; $\Delta = (1+i)^2 + 4(-2(1-i)) = 8 - 6i = (3-i)^2$.

$z_1 = -2$; $z_2 = 1 - i$.

2) $\theta \in [0,\pi]$, $(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta})z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$.

a- On a : $(-2)^2 + (1 + e^{i\theta})(-2) - 2(1 - e^{i\theta}) = 4 - 2 - 2e^{i\theta} - 2 + 2e^{i\theta} = 0$

b- $(-2)z_2 = -2(1 - e^{i\theta})$ signifie $z_2 = 1 - e^{i\theta}$

3) $A(-2)$ et $M_\theta(1 - e^{i\theta})$

a- $AM_\theta = \left|1 - e^{i\theta} + 2\right| = \left|3 - e^{i\theta}\right| = \left|3 - \cos\theta - i\sin\theta\right| = \sqrt{10 - 6\cos\theta}$.

b- AM_θ est maximale si $\cos\theta = -1$ soit $\theta = \pi$.

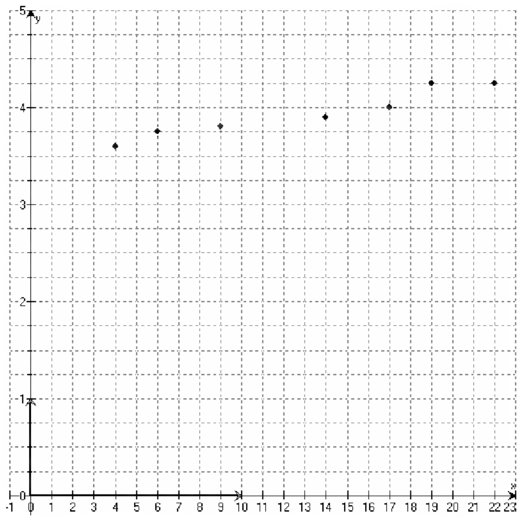
Exercice n°3 (5 points)

- **Contenu :** Série statistique double.
- **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.

✓ **Corrigé :**

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kilogrammes)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a-



Nuages des points associés

à la série (X,Y)

b- D'après le nuage des points, un ajustement affine de la série double est bien justifié .

2) a- $\overline{x} = 13$; $\sigma_x = 6,324$.

b- $\overline{y} = 3,971$; $\sigma_y = 0,287$.

3) a- Le coefficient de corrélation entre X et Y est : $r = 0,946$.

b- Il ya une très forte corrélation entre x et y.

4) a- Cov (X , Y) = 1,721

b- L'équation de la droite de régression de Y en X est de la forme : $y = a x + b$

avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{1,721}{40} = 0,04$; $b = \overline{y} - a\overline{x} = 3,41$

D'où une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 0,04x + 3,41$

5) a- $x = 30$ alors $y = (0,04)(30) + 3,41 = 4,61$.

Une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance est 4,61 kg.

b- pour $y = 3,85$ kg on obtient $3,85 = 0,04x + 3,41$ d'où $x = 11$

Ainsi l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 kg est égal à 11 jours.

Exercice 4 (6 points)

- **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle, suites réelles.
- **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une fonction, déterminer les asymptotes à sa courbe, étudier la position relative de deux courbes, appliquer l'inégalité des accroissements finis, étudier la convergence d'une suite réelle définie par une fonction.

- **Corrigé :**

Pour tout $x \in IR$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln (1 + e^{-x})$.

1) a- $u : x \to 1 + e^{-x}$ est dérivable et strictement positive sur IR, alors la fonction $x \to \ln(1 + e^{-x})$ est dérivable sur IR, par suite f est dérivable sur IR et on a :

Pour tout $x \in IR$; $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^{x}}$.

b- tableau de variation de f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f '(x)	-
f(x)	$+\infty \searrow 0$

c- Pour tout $x \in IR$, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{-x}(e^{x} + 1)) = \frac{1}{2}(\ln(e^{-x}) + \ln(e^{x} + 1)) = \frac{1}{2}(-x + \ln(e^{x} + 1))$

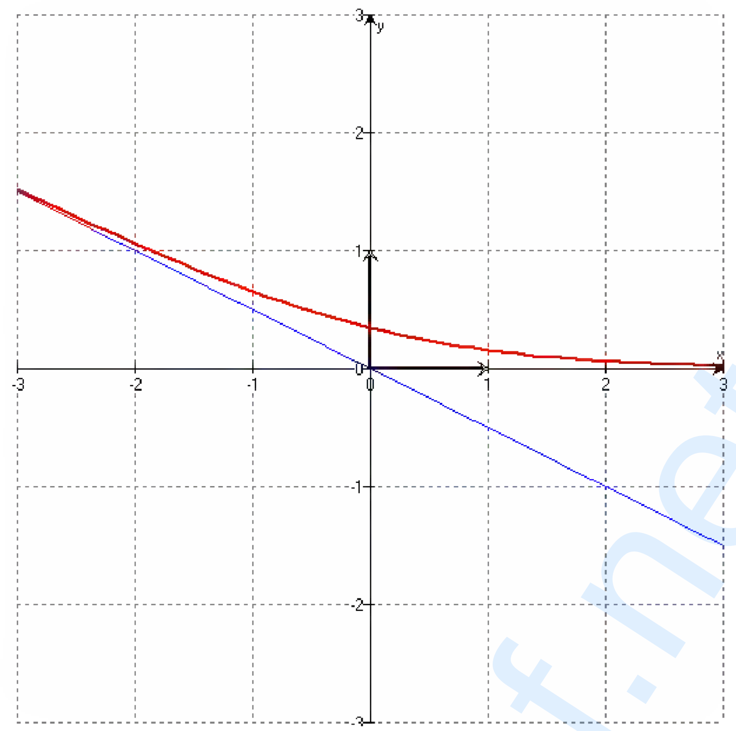
d'où $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{x})$

d- • $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + \frac{1}{2} x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(1 + e^{x})) = 0$ donc la droite Δ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

• $f(x) - (-\frac{1}{2}x) = \ln (1 + e^{x})$ et comme $1 + e^{x} > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $\ln (1 + e^{x}) > 0$ et par suite $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ .

e- Traçage de $\mathscr{C}_f$ et Δ .



2) a- On pose $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur IR, $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout $x \in IR$.

h est une fonction continue strictement décroissante sur IR alors h réalise une bijection de IR sur h(IR)=IR.

Alors il existe un réel α unique tel que $h(\alpha) = 0$. Or $h(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) = \alpha$.

b- $h(0) = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$ et $h(1) = -0{,}84 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $0 < \alpha < 1$.

3) a- Pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$.

Pour tout $x \geq 0$, $1 + e^x \geq 2$ signifie $\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{4}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b- f est dérivable sur IR_+ et pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après les inégalités des accroissements finis : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$; $x \in IR_+$

Conclusion : pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) a- Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \geq 0$; vérifié.

Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après 1)b-

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $u_n \geq 0$.

b- D'après 3)b et pour $x = u_n \in IR_+$ pour tout $n \in IN$ on obtient :

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \text{ signifie } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| .$$

c- Pour $n = 0$; $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, vraie .

Soit $n \in IN$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après b) on a pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ et comme $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.