

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTRE DE L'EDUCATION

**EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010**

**SESSION DE CONTRÔLE**

**SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES**  
**EPREUVE : MATHEMATIQUES      DUREE : 3h      COEFFICIENT : 3**

*Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3*

**Exercice 1 (3 points)**

*Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes.  
Aucune justification n'est demandée.*

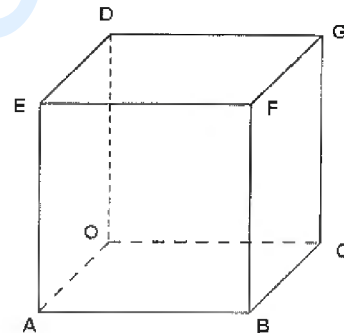
- 1) Si  $u$  et  $v$  sont deux racines cinquième de l'unité, alors  $u.v$  est aussi une racine cinquième de l'unité.
- 2)  $1 + i\sqrt{2009}$  est une solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 - 2z + 2010 = 0$ .
- 3) Un argument du nombre complexe  $z = -5e^{\frac{i\pi}{6}}$  est  $-\frac{\pi}{6}$ .
- 4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z = 3e^{i\theta}$ , où  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0, \pi]$ , est un demi-cercle.

**Exercice 2 (6 points)**

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct  $(O, \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$ .

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$ .  
b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est  $x + y + z - 1 = 0$ .
- 2) Soit  $\Delta$  la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)
  - a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .
  - b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de  $\Delta$  et du plan (ACD).
- 3) Pour tout réel  $m$ , on désigne par  $S_m$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$ 
  - a) Montrer que pour tout réel  $m$ ,  $S_m$  est une sphère dont on précisera le centre  $I_m$  et le rayon  $r$ .
  - b) Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $S_m$  passe par le point A.
- 4) a) Vérifier que les centres des sphères  $S_0$  et  $S_{\frac{2}{3}}$  sont deux points de la droite  $\Delta$ .  
b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères  $S_0$  et  $S_{\frac{2}{3}}$  suivant un même cercle qu'on précisera.



**Exercice 3 (6 points)**

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $(\mathcal{C})$  d'une fonction  $f$  définie, dérivable et strictement croissante sur  $] -1, 1 [$ . Les droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = 1$  sont les asymptotes à  $(\mathcal{C})$ . La droite  $(T)$  est la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $O$ .

- 1) En utilisant le graphique déterminer  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction réciproque de  $f$  et  $(\mathcal{C}')$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Déterminer  $g(0)$  et  $g'(0)$ .
  - b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$ .
- 3) Sachant que l'expression de  $g$  est de la forme  $g(x) = \frac{e^x + a}{e^x + b}$ , montrer en utilisant ce qui précède que  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- 4) a) Vérifier que  $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Calculer alors  $\int_0^1 g(x) dx$ .
- 5) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $y = 1$ .
  - a) Montrer que  $\mathcal{A} = 1 - 2 \int_0^1 g(x) dx$ .
  - b) En déduire  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 4 (5 points)**

On considère les suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_0 = 1 ; v_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha) v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = (1-\alpha) u_n + \alpha v_n$$

où  $\alpha$  est un réel donné tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

- 1) Soit  $(t_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $t_n = v_n - u_n$ .
  - a) Calculer  $t_0$  et  $t_1$ .
  - b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $t_n = (2\alpha - 1)^n$ .
  - c) En déduire la limite de  $t_n$ .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ .  
 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.  
 c) En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ .  
 d) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n + v_n = 3$  et en déduire la valeur de la limite  $\ell$ .

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

