

Section: Sciences Expérimentales

Session principale 2009

Matière : Mathématiques ( Corrigé )

**Exercice n°1 ( 3 points )**

- ✓ **Contenu :** Suites réelles – Fonctions numériques – Intégrales.
- ✓ **Aptitudes visées :** Décider de la convergence d'une suite réelle, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et celui de la moyenne, calculer une limite, appliquer la propriété relative à l'intégrale et l'ordre.

✓ **Corrigé :**

- 1) V      2) F      3) V      4) F      5) V      6) F

**Exercice n°2 ( 6 points )**

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe.

✓ **Corrigé :**

- 1)
- $B \in \mathcal{C}_{(0,2)}$
- signifie
- $|z_B| = 2$

$$(\vec{u}, \widehat{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ équivaut à } \arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

$$z_B = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

- 2) a- On a :
- $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_C) = -\operatorname{Re}(z_B) \\ \operatorname{Im}(z_C) = \operatorname{Im}(z_B) \end{cases}$
- d'où
- $C = \mathcal{S}_{(0,\vec{v})}(B)$
- (voir figure).

b-  $\operatorname{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = 2$  et  $\operatorname{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = 1+i\sqrt{3} + 1-i\sqrt{3} = 2$  d'où

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \text{ par suite } OACB \text{ est un parallélogramme, de plus } OA = OB = 2.$$

Conclusion : OACB est un losange.

**Remarque :** On peut montrer que OACB est un parallélogramme en vérifiant que ses diagonales [AB] et [OC] ont même milieu.

- 3) a-
- $z_0 = 0$
- alors
- $z_0^3 = 0 \in \mathbb{R}_+$
- d'où
- $O \in E$
- .

$$z_A = 2 \text{ alors } z_A^3 = 8 \in \mathbb{R}_+ \text{ d'où } A \in E.$$

$$z_B = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ alors } z_B^3 = 8 e^{i2\pi} = 8 \text{ d'où } B \in E.$$

b- • Si  $M(z) \in [OB) \setminus \{O\}$  alors  $(\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv (\vec{u}, \widehat{OB}) [2\pi]$  d'où  $(\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ,

En posant  $OM = |z| = r$ , on aura  $z_M = r e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ce qui donne  $z_M^3 = r^3 e^{i2\pi} = r^3 \in \mathbb{R}_+^*$  par suite  $M \in E$ .

• Si  $M = O$  alors  $M \in E$ .

Conclusion : tout point  $M$  de la demi-droite  $[OB)$  appartient à  $E$ .

c- Soit  $z$  un nombre complexe non nul, de module  $r$  et d'argument  $\theta$ .

$$z^3 \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow z^3 = |z^3| \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = r^3 \Leftrightarrow e^{3i\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

d- • D'après 3)c- si  $z \neq 0$  alors  $\theta = \frac{2k\pi}{3}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

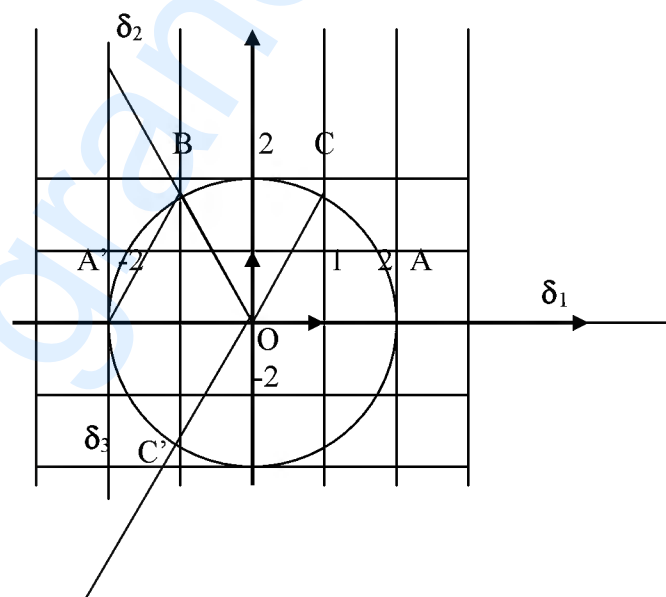
$$k = 3k', k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow M \in [OA) - \{O\}.$$

$$k = 3k' + 1, k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow M \in [OB) - \{O\}.$$

$$k = 3k' + 2, k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow M \in [OC') - \{O\} \text{ tel que } C' = S_0(C).$$

• D'après 3)a-  $O \in E$

Conclusion :  $E = [OA) \cup [OB) \cup [OC')$



**Exercice n°3 ( 5 points )**

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, distance d'un point à un plan, calcul de volumes, section d'une sphère par un plan.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan, calculer le volume d'un tétraèdre.
- ✓ **Corrigé :**

$A(0, 0, 0)$ ;  $B(2, 0, 0)$ ;  $D(0, 4, 0)$ ;  $E(0, 0, 3)$ .

1) a-  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ .

b-  $\overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

c-  $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$  est un vecteur normal du plan (EBG),

donc une équation cartésienne du plan (EBG) est de la forme :  $12x - 6y + 8z + d = 0$

et comme  $E \in (EBG)$  donc  $24 + d = 0$  signifie  $d = -24$ .

**Conclusion :** Une équation du plan (EBG) est :  $6x - 3y + 4z - 12 = 0$ .

2) a- Soit  $\alpha$  un réel différent de 1 et  $M(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$ .

$$\overrightarrow{AM} = 2\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = \alpha\overrightarrow{AG} \text{ et } \alpha \neq 1 \text{ donc } M \in (AG) \text{ et } M \neq G.$$

b- On a :  $12\alpha - 12\alpha + 12\alpha - 12 = 12(\alpha - 1) \neq 0$  car  $\alpha \neq 1$  donc  $M$  n'appartient pas au plan (EBG).

**Autrement :**  $A \notin (EBG)$  donc  $(AG) \not\subset (EBG)$  de plus  $(AG) \cap (EBG) = \{G\}$  et comme  $M$  décrit la droite (AG) privé du point G donc  $M \notin (EBG)$

3) a-  $V =$  le volume du tétraèdre MEBG .

$$V = \frac{1}{6} | (\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EM} | \quad \text{or} \quad \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{6} | 24\alpha - 24\alpha + 24(\alpha - 1) | = 4 | \alpha - 1 |.$$

b- Le volume du tétraèdre AEBG est égal au volume du tétraèdre MEBG pour  $M = A$  c'est à dire pour, donc il est égal à 4.

c- Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal à  $2 \times 4 \times 3 = 24$

$$V \text{ est égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH signifie } 4 | \alpha - 1 | = 24$$

$$\text{signifie } | \alpha - 1 | = 6 \text{ signifie } \alpha = 7 \text{ ou } \alpha = -5.$$

**Exercice n°4 ( 6 points )**

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe, Calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Interpréter graphiquement la position relative des courbes de deux fonctions et le signe de leur différence, étudier les variations d'une fonction et tracer sa courbe, calculer une aire plane.
- ✓ **Corrigé :**

1) a-  $u(2) = -4 + 2 = -2 < 0$  et  $v(2) = 2\ln 2 > 0$  d'où  $\Gamma$  est la courbe de  $u$  et  $C$  est la courbe de  $v$ .

**Remarque :** On peut aussi calculer les limites de  $u(x)$  et  $v(x)$  en  $+\infty$  et conclure.

b- si  $x \in [0, 1]$ ,  $\Gamma$  est au dessus de  $C$  d'où  $u(x) - v(x) \geq 0$ .

si  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\Gamma$  est au dessous de  $C$  d'où  $u(x) - v(x) \leq 0$ .

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{3} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x \ln x \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Conclusion :  $f$  est dérivable à droite en 0 et on a  $f'_d(0) = 0$ .

3) a- Pour tout  $x > 0$ ;  $f'(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(2x \ln x + x) = -x^2 + x - x \ln x = u(x) - v(x)$ .

Pour  $x = 0$ ,  $f'_d(0) = 0 = u(0) - v(0)$ .

Conclusion : pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = u(x) - v(x)$

$$b- \mathcal{Q} = \int_0^1 (u(x) - v(x)) dx = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{5}{12} u.a$$

4) a- On a pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = u(x) - v(x)$  par suite et d'après 1)b- on a le tableau de variation suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{5}{12}$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \frac{-1}{3} + \frac{3}{4x} - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

b-  $f(0) = 0$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[0,1]$ .

On désigne par  $f_1$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1, +\infty[$ .  $f_1$  est continue strictement décroissante sur  $I$ , donc  $f_1$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = ]-\infty, \frac{5}{12}]$ , or  $0 \in J$  d'où il existe un réel  $\alpha$  unique appartenant à  $J$  tel que  $f_1(\alpha) = 0$ .

$f(1,5) \approx 0,106 > 0$  et  $f(1,6) \approx -0,04 < 0$  donc  $1,5 < \alpha < 1,6$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse  $\alpha$  autre que  $O$ .

c-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2}{3} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{-x}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) = -\infty$  d'où  $\mathcal{C}_f$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$ .

