

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION
ET DE LA FORMATION

**EXAMEN
DU BACCALAUREAT**

SESSION DE JUIN 2007

SESSION DE CONTROLE

SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
DURÉE : 3 heures COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 (5 points)

Soit θ un réel appartenant à $[0, \pi]$.

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 1 - ie^{2i\theta} = 0$.

- 1) Résoudre (E) pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- 2) a – Vérifier que $e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ est une racine carrée de $(ie^{2i\theta})$.
b – Résoudre (E).
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B, C et I les points d'affixes respectives $2i$, $i + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$, $i - e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ et i .
Soit \mathcal{C} le cercle de centre I et de rayon 1.
a – Calculer les affixes des vecteurs \overline{IB} et \overline{IC} . En déduire que [BC] est un diamètre du cercle \mathcal{C} .
b – Montrer alors que pour θ différent de $\frac{\pi}{4}$, le quadrilatère OBAC est un rectangle.

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne U_1 contient cinq boules numérotées 0, 0, 1, 1, 2 et une urne U_2 contient cinq boules numérotées 0, 1, 1, 1, 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

L'épreuve consiste à tirer une boule de U_1 et une boule de U_2 .

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « obtenir deux boules numérotées 1 ».
B : « obtenir exactement une boule numérotée 1 ».
- 2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le produit des numéros des deux boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.
- 3) Soit E l'événement «obtenir un produit nul sachant qu'une des deux boules tirées est numérotée 1». Calculer la probabilité de E.

PROBLEME : (10 points)

I – Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = e^x + 2 - x$.

- 1) Étudier les variations de la fonction h .
- 2) En déduire que pour tout réel x , on a : $h(x) > 0$.

II – On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + (x - 1) e^{-x}$

On désigne par (\mathcal{C}) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que pour tout réel x , on a : $f'(x) = e^{-x} h(x)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a – Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
b – En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α et que α vérifie :
$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$
- 4) a – Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$.
b – Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Δ) .
- 5) a – Montrer que la courbe (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.
b – Vérifier qu'une équation cartésienne de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point I est :
 $(e^3 - 1)x - e^3 y + 5 = 0.$
- 6) Tracer (Δ) , (T) et (\mathcal{C}) .
- 7) On désigne par \mathcal{A} l'aire du domaine limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
a – Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) - x = 1 + e^{-x} - f'(x)$.
b – Montrer que $\mathcal{A} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$.