| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◇◇◇◇<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION **2015** | Épreuve : **MATHEMATIQUES** |
|---|---|
| | Durée : 3 H |
| | Coefficient : 3 |
| Section : **Sciences expérimentales** | **Session de contrôle** |

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

**<u>Exercice 1</u> : (5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère $(S)$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2/ Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\vec{JI}\cdot\vec{JM}=0$.

a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que $AJ=6$.

4/ Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

**<u>Exercice 2</u> : (5 points)**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-4e^{i\frac{\pi}{3}}z+e^{2i\frac{\pi}{3}}=0$.

1/ a) Montrer que le discriminant $\Delta$ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) .On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1+i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

a) Écrire $z_I$ sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B tels que $OA < OB$.

Placer A et B, puis justifier que $OA = 2-\sqrt{3}$ et $OB = 2+\sqrt{3}$.

c) En déduire que les affixes respectives $z_A$ et $z_B$ des points A et B sont les solutions de l'équation (E).

**Exercice 3 : (6 points)**

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$..

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f et par $\Delta$ la droite d'équation $y = 2x$.

a) Vérifier que $\Delta$ est la tangente à $C_f$ en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que $C_f$ admet une direction asymptotique qui est celle de la droite $\Delta$.

c) Étudier la position relative de $C_f$ et $\Delta$.

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe $C_f$.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite $\Delta$, la courbe $C_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A} = e - 2$.

**Exercice 4 : (4 points)**

1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

a) Calculer $u_1$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2/ En étudiant les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, montrer que

$$1 + x \leq e^x \text{, pour tout réel } x.$$

3/ Soit $(v_n)$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$, par

$$v_n = (1+u_0)(1+u_1) \times \dots \times (1+u_n).$$

a) Calculer $v_0$ et $v_1$.

b) Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante.

c) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente.

e) Soit $\ell$ la limite de $(v_n)$.

Montrer que $1 < \ell \leq \sqrt{e}$.

Section : ........................ N° d'inscription : .................. Série : ...........
Nom et prénom : .......................................................................................
Date et lieu de naissance : ............................................................................

Signatures des surveillants
..................
..................

**Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales**

## Annexe (à rendre avec la copie)