

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : Sciences expérimentales	Session principale

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A , B et C déterminent un plan qu'on notera (P) .

b) Justifier que (P) est d'équation $x + y + z - 2 = 0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P) .

2/ Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C .

b) En déduire que H est le centre du cercle \mathcal{C} .

3/ Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H .

Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

4/ Soit M un point de Δ .

a) Justifier que $MA = MB = MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA = ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A , B , C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C) .

b) Placer A .

2/ On considère dans \mathbb{C} , l'équation $(E) : z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}[-1 + i(1 - \sqrt{2})] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}[1 + i(1 + \sqrt{2})]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA) .

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2 .

Exercice 3: (3 points)

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C , exprimée en cm^3 , chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm .

t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1/ a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C .

b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t, C).

c) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).

d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm ?

2/ En fait, la capacité vitale C (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation (R) : $C = \alpha t + \beta g + 754$, où α et β sont des constantes (ne dépendant pas de t et g).

a) Donner l'expression de C pour $g = 40$.

b) En déduire, en utilisant 1/ c), les valeurs de α et β .

3/ Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant 188 cm.

Exercice 4 : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$.

b) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de \mathcal{C} par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x^2 - 1) + \ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

$(x^2 - 1)$ et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe \mathcal{C} admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ .

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de \mathcal{C} et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé relativement au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y = \frac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D .

b) Tracer la droite D et placer le point B .

c) Tracer la courbe \mathcal{C} .

5/ Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites

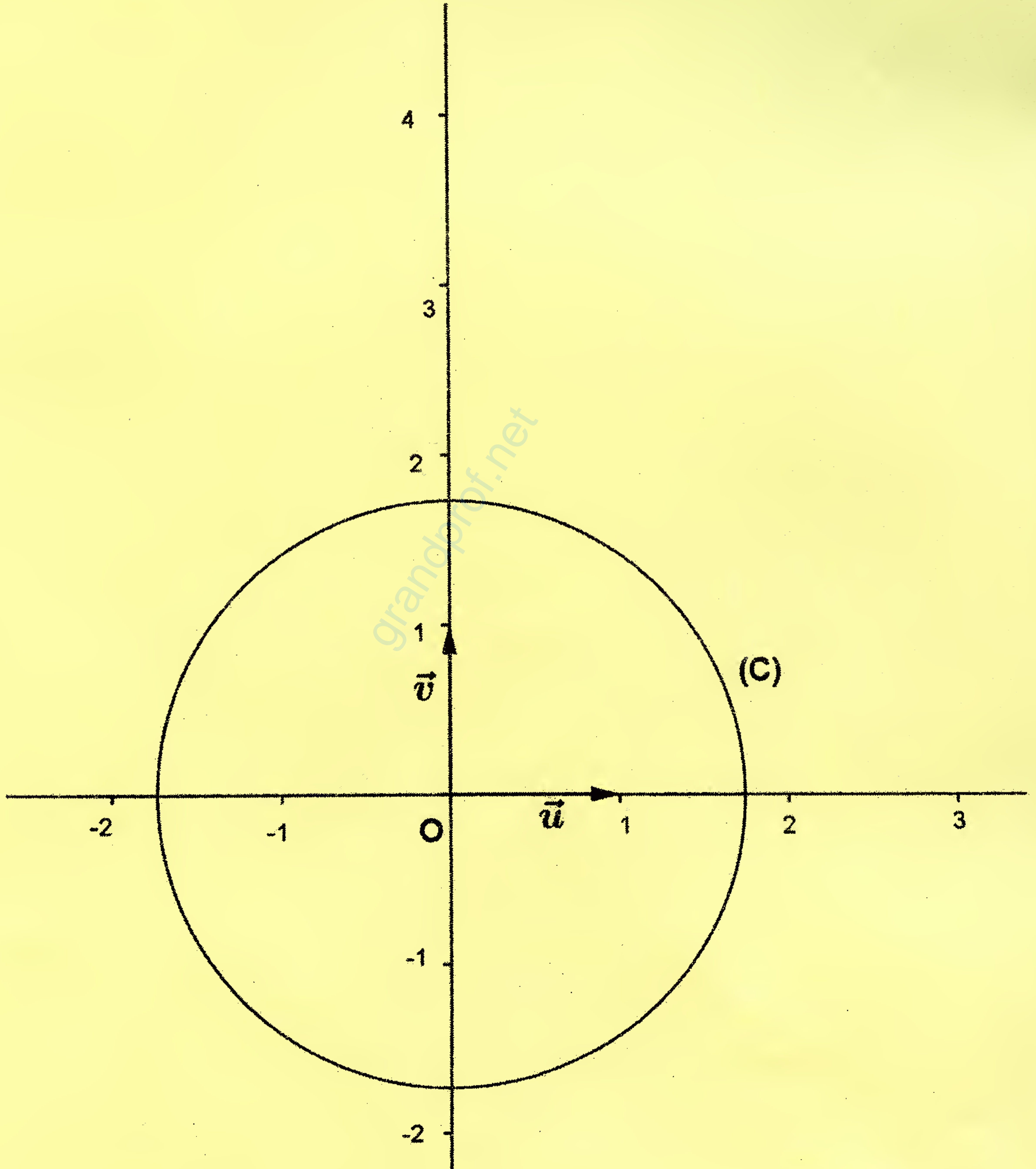
d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

Calculer \mathcal{A} .

grandprof.net

Annexe (à rendre avec la copie)

(Figure 1)



(Figure 2)

