

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	Session de contrôle	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences expérimentales
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3

Ⓢ Ⓢ Ⓢ Ⓢ Ⓢ

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1) Une primitive de la fonction f définie sur $] -\infty, 0 [$ par $f(x) = \frac{x+1}{x}$ est :
- a) $F(x) = x + \ln(x) - 1$ b) $F(x) = x+1 + \ln(-x)$ c) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
- 2) Soit f une fonction strictement positive, paire et continue sur $[-1, 1]$.
Soit $I = \int_0^1 f(x) dx$, alors
- a) $\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx = I^2$ b) $\int_0^{-1} f(x) dx = -I$ c) $\int_0^{-1} f(x) dx = I$
- 3) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n^2$. Alors
- a) (U_n) est géométrique b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- 4) Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un sondage effectué dans une population de 100 individus.

	Fumeurs	Non fumeurs
Hommes	15	35
Femmes	10	40

- i) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit un non fumeur sachant que c'est un homme est :
- a) 0,7 b) 0,35 c) 0,66
- ii) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit une femme non fumeur est :
- a) 0,2 b) 0,8 c) 0,4

Exercice 2 (4 points)

- 1) a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$.
- b) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $(E_1): z^2+iz+1+3i=0$.
- c) En déduire les solutions de l'équation $(E_2): z^2-iz+1-3i=0$.
- 2) Déduire alors l'ensemble des solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $(E): z^4+3z^2+6z+10=0$.
- 3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i, 1-2i, -1-i$ et $-1+i$.
- a) Placer les points A, B, C et D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- b) Montrer que ABCD est un trapèze.
- c) Calculer l'aire de ce trapèze.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$.

On désigne par P le plan d'équation $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

- 1) a) Montrer que S est la sphère de centre $\Omega(1, -2, -2)$ et de rayon $R = 2$.
- b) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle \mathcal{C} de centre $K\left(\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ et dont on déterminera le rayon r .
- 2) Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (K, Ω) est
- $$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = -2+2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$$
- 3) Soit $I(\alpha, \beta, \gamma)$ un point de la sphère S et \mathcal{Q} le plan tangent en I à S .
- a) Montrer qu'une équation du plan \mathcal{Q} est
- $$(\alpha - 1)x + (\beta + 2)y + (\gamma + 2)z - \alpha + 2\beta + 2\gamma + 5 = 0 .$$
- b) Vérifier que $N(-1, 2, -6)$ est un point de (K, Ω) .
- c) Montrer alors que tous les plans \mathcal{Q} tangents à S en un point de \mathcal{C} passent par N .

Exercice 4 (7 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)\ln(x+1) = 0$.
- Vérifier que pour tout $x > -1$, $g'(x) = \ln(x+1) + \frac{3}{2}$.
- Dresser le tableau de variations de g .
- Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1; +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x+1)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
- Déterminer la limite de f à droite en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.
- Montrer que $f'(x) = \frac{2x}{x+1}g(x)$, pour tout $x > -1$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Construire la courbe (C). (On précisera la tangente au point O).

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

- Vérifier que $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, pour tout $x \neq -1$.
 - En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{1}{4}$.
- Vérifier que la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive sur $]-1; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.
 - Montrer que $(n+2)I_{n+1} = -1 + 2 \ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1)I_n$.
 - Préciser la valeur de I_2 et interpréter graphiquement cette valeur.